

Tüübi tuletamine

- Näide:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \vdash x : \tau_7 \rightarrow \tau_6 \quad \frac{\Gamma \vdash y : \tau_8 \rightarrow \tau_7 \quad \Gamma \vdash z : \tau_8}{\Gamma \vdash yz : \tau_7} \\
 \hline
 \{x:\tau_1, y:\tau_3, z:\tau_5\} \vdash x(yz) : \tau_6 \\
 \hline
 \{x:\tau_1, y:\tau_3\} \vdash \lambda z. x(yz) : \tau_4 \\
 \hline
 \{x:\tau_1\} \vdash \lambda yz. x(yz) : \tau_2 \\
 \hline
 \vdash \lambda xyz. x(yz) : \tau_0
 \end{array}$$

Võrrandid:

$$\begin{array}{lll}
 \tau_0 = \tau_1 \rightarrow \tau_2 & \tau_2 = \tau_3 \rightarrow \tau_4 & \tau_4 = \tau_5 \rightarrow \tau_6 \\
 \tau_1 = \tau_7 \rightarrow \tau_6 & \tau_3 = \tau_8 \rightarrow \tau_7 & \tau_5 = \tau_8
 \end{array}$$

Lahend: $\tau_0 = (\tau_7 \rightarrow \tau_6) \rightarrow (\tau_8 \rightarrow \tau_7) \rightarrow \tau_8 \rightarrow \tau_6$

Tüübi tuletamine

- Tähistused:
 - $S, S', \dots$ (tüübi)substitutsioonid.
 - $\tau \succ \tau' \iff \exists S [\tau' = S(\tau)];$
 - $\Gamma \succ \Gamma' \iff \exists S [\Gamma' \supseteq S(\Gamma)].$
- Paar (Γ, τ) on termi M printsiipiaalne paar parajasti siis, kui
 - (i) $\Gamma \vdash M : \tau;$
 - (ii) $\Gamma' \vdash M : \tau' \iff \Gamma \succ \Gamma' \wedge \tau \succ \tau'.$Kui M on kinnine term ($\Gamma = \emptyset$), siis τ on printsiipiaalne tüüp.
- Teoreem: Kui term M on tüübitav, siis leidub talle printsiipiaalne paar. See paar on unikaalne (tüübi)muutujate ümbernimetamise täpsuseni.

Tüübi tuletamine

- Algoritm:
 - Sisend: algkontekst Γ ja term M
 - Väljund: tüüp τ_M ja võrrandite süsteem E_M
 1. kui $M \equiv x$ ja $x \notin \text{dom}(\Gamma)$, siis $\tau_M = \alpha_x$ ja $E_M = \emptyset$;
 2. kui $M \equiv x$ ja $x \in \text{dom}(\Gamma)$, siis $\tau_M = \Gamma(x)$ ja $E_M = \emptyset$;
 3. kui $M \equiv PQ$, siis $\tau_M = \alpha$ ja $E_M = E_P \cup E_Q \cup \{\tau_P = \tau_Q \rightarrow \alpha\}$;
 4. kui $M \equiv \lambda x.P$, siis $\tau_M = \alpha_x \rightarrow \tau_P$ ja $E_M = E_P$
 - Lõpuks leitakse saadud võrrandisüsteemi lahendav kõige üldisem unifikaator U ; kui seda ei leidu siis pole term tüübitav, vastasel korral on termi tüüp $U(\tau_M)$.

Tüübi tuletamine

- Näide:

$$\begin{array}{c}
 \frac{(y : \alpha_y, \emptyset) \quad (z : \alpha_z, \emptyset)}{(x : \alpha_x, \emptyset) \quad (yz : \beta, \{\alpha_y = \alpha_z \rightarrow \beta\})} \\
 \frac{(x(yz) : \gamma, \{\alpha_y = \alpha_z \rightarrow \beta, \alpha_x = \beta \rightarrow \gamma\})}{(\lambda z.x(yz) : \alpha_z \rightarrow \gamma, \{\alpha_y = \alpha_z \rightarrow \beta, \alpha_x = \beta \rightarrow \gamma\})} \\
 \frac{(\lambda yz.x(yz) : \alpha_y \rightarrow \alpha_z \rightarrow \gamma, \{\alpha_y = \alpha_z \rightarrow \beta, \alpha_x = \beta \rightarrow \gamma\})}{(\lambda xyz.x(yz) : \alpha_x \rightarrow \alpha_y \rightarrow \alpha_z \rightarrow \gamma, \{\alpha_y = \alpha_z \rightarrow \beta, \alpha_x = \beta \rightarrow \gamma\})}
 \end{array}$$

- Mittetüüdbitava termi näide:

$$\begin{array}{c}
 \frac{(x : \alpha_x, \emptyset) \quad (x : \alpha_x, \emptyset)}{(xx : \beta, \{\alpha_x = \alpha_x \rightarrow \beta\})} \\
 \frac{(\lambda x.xx : \alpha_x \rightarrow \beta, \{\alpha_x = \alpha_x \rightarrow \beta\})}{}
 \end{array}$$

Hindley-Milner'i tüübisüsteem

- Tüübid: $\tau := \alpha \mid (\tau \rightarrow \tau)$
- Tüübiskeemid: $\sigma := \tau \mid \forall\alpha. \sigma$
- Tüüpimisreeglid:

$$\frac{}{\Gamma, x:\tau \vdash x:\tau}$$

$$\frac{\Gamma, x:\sigma \vdash M:\tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M:\sigma \rightarrow \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M:\sigma}{\Gamma \vdash M:\forall\alpha.\sigma} \quad (\alpha \notin \text{FV}(\Gamma))$$

$$\frac{\Gamma \vdash M:\tau \quad \Gamma, \{x:\tau\} \vdash N:\sigma}{\Gamma \vdash \text{let } x = M \text{ in } N:\sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M:\sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N:\sigma}{\Gamma \vdash MN:\tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M:\forall\alpha.\sigma}{\Gamma \vdash M:\sigma[\tau/\alpha]}$$

- Reduktsioon: $\text{let } x = M \text{ in } N \rightarrow N[M/x]$

Hindley-Milner'i tüübisüsteem

- Let-seotud vs. λ -seotud muutujad

$$\Gamma = \{3:\text{Int}, \text{True}:\text{Bool}, (,):\forall\alpha\beta.\alpha\rightarrow\beta\rightarrow\alpha\times\beta\}$$

$$\Gamma \vdash \text{let } id = \lambda x.x \text{ in } (id\,3, id\,\text{True}) : \text{Int} \times \text{Bool}$$

$$\Gamma \not\vdash (\lambda id.(id\,3, id\,\text{True})) (\lambda x.x) : \text{Int} \times \text{Bool}$$

- Modifitseeritud tüüpimisreeglid:

$$\frac{}{\Gamma, x:\sigma \vdash x:\tau} (\sigma \succ \tau) \qquad \frac{\Gamma \vdash M:\tau \quad \Gamma, \{x:\forall\bar{\alpha}.\tau\} \vdash N:\sigma}{\Gamma \vdash \text{let } x = M \text{ in } N:\sigma} (\bar{\alpha} \notin \text{FV}(\Gamma))$$

Hindley-Milner'i tüübisüsteem

- Näide:

$$\frac{\frac{\Gamma, \{x:\alpha\} \vdash x : \alpha}{\Gamma \vdash \lambda x. x : \alpha \rightarrow \alpha} \quad \frac{\frac{\Gamma' \vdash id : \text{Int} \rightarrow \text{Int} \quad \Gamma' \vdash 3 : \text{Int}}{\Gamma' \vdash id\,3 : \text{Int}} \quad \frac{\Gamma' \vdash id : B \rightarrow B \quad \Gamma' \vdash T : B}{\Gamma' \vdash id\,T : B}}{\Gamma, \{id : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha\} \vdash (id\,3, id\,T) : \text{Int} \times B} \\
 \Gamma \vdash \text{let } id = \lambda x. x \text{ in } (id\,3, id\,T) : \text{Int} \times B$$

- Väga komplitseeritud tüübiga term:

```

let pair = λxyz. zxy in
let x1 = λy. pair yy in
let x2 = λy. x1 (x1 y) in
let x3 = λy. x2 (x2 y) in
let x4 = λy. x3 (x3 y) in
let x5 = λy. x4 (x4 y) in
x5 (λy. y)

```