

Reduktsioonistrateegiad

- Normaalkuju saavutamine sõltub reduktsiooni järjekorrast!
- Normaaljärjekord — alati redutseeritakse kõige välimine vasakpoolne reedeks

$$\underline{(\lambda x.y)((\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx)))} \longrightarrow_{\beta} y$$

- Aplikatiivne järjekord — alati redutseeritakse kõige sisemine vasakpoolne reedeks

$$\begin{aligned} & (\lambda x.y)((\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx))) \\ \longrightarrow_{\beta} & (\lambda x.y)(\underline{(\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx))}) \\ & \dots \end{aligned}$$

Märgendatud λ -termid

- $\Lambda_{\mathcal{A}}$ on märgendatud λ -termide hulk:
 1. $x^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja x on muutuja;
 2. $(\lambda x.M)^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja $M \in \Lambda_{\mathcal{A}}$;
 3. $(MN)^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja $M, N \in \Lambda_{\mathcal{A}}$.
- Näide:
$$((\lambda x.(x^1 x^2)^3)^4 (y^5 z^6)^7)^8$$
- Märgenduseks nimetatakse funktsiooni mis (märgendamata) termi iga alamtermiga seob märgendi.
- Märgendust nimetatakse algmärgenduseks kui erinevad alamtermid seotakse erinevate märgenditega.

Märgendatud λ -termid

- Märgendatud β -reegel:

$$((\lambda x.M)^a N)^b = M[N/x]$$

- Märgendatud substituutsioon:

$$x^a[N/x] \equiv N$$

$$y^a[N/x] \equiv y^a$$

$$(M_1 M_2)^a[N/x] \equiv (M_1[N/x] M_2[N/x])^a$$

$$(\lambda y.M)^a[N/x] \equiv (\lambda y.M[N/x])^a$$

- Näide:

$$((\lambda x.(x^1 x^2)^3)^4 (y^5 z^6)^7)^8 \longrightarrow_{\beta} ((y^5 z^6)^7 (y^5 z^6)^7)^3$$

Reedeksi jäägid

- Olgu $M \longrightarrow N$, $\mathcal{I}$ termi M märgendus, $\mathcal{J}$ termi N märgendus ning Δ redutseeritava reedeksi märgend ($M \longrightarrow^\Delta N$):
 - alamtermi $T \in \text{Sub}(N)$ nimatatakse alamtermi $S \in \text{Sub}(M)$ järglaseks kui $\mathcal{I}(S) = \mathcal{J}(T)$;
 - reedeksi järglast nimetatakse selle reedeksi jäägiks;
 - redutseeritud reedeksil ei ole ühtegi jääki.
- Näide:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda xy. (\lambda zw. xz) y) MN \\
 & \longrightarrow_\beta (\lambda y. (\lambda zw. Mz) y) N \\
 & \longrightarrow_\beta (\lambda zw. Mz) N \\
 & \longrightarrow_\beta \lambda w. MN
 \end{aligned}$$

Peanormaalkujud

- Term $M \in \Lambda$ on peanormaalkujul (HNF) kui

$$M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. x M_1 \dots M_m \quad n, m \geq 0$$

- Kui $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. (\lambda x. M_0) M_1 \dots M_m$, kus $n \geq 0$ ja $m \geq 1$, siis alamtermi $(\lambda x. M_0) M_1$ nimetatakse peareedeiks
- Term $M \in \Lambda$ on nõrgal peanormaalkujul (WHNF) kui

$$M \equiv \begin{cases} x M_1 \dots M_n & n \geq 0 \\ \lambda x. M \end{cases}$$

Standardiseerimisteoreem

- Standardreduktsiooniks nimatatakse reduktsioonijada

$$M_0 \longrightarrow^{\Delta_0} M_1 \longrightarrow^{\Delta_1} M_2 \longrightarrow^{\Delta_2} \dots$$

kus iga kahe reedeksi Δ_i ja Δ_j ($i > j$) korral Δ_i ei ole reedeksist Δ_j vasakul asuvate reedeksite jäägiks.

- Normaaljärjekorras reduktsioon on standardreduktsioon!
- Lemma: $M \Longrightarrow N \Rightarrow \exists Z [M \Longrightarrow_h Z \Longrightarrow_i N]$
- Standardiseerimisteoreem: $M \Longrightarrow N \Rightarrow M \Longrightarrow_s N$

Konstantidega lambda-arvutus

- Konstantidega λ -termide süntaks

E	$::=$	V	muutuja
		C	konstant
		$(E_1 E_2)$	aplikatsioon
		$(\lambda V. E)$	abstraktsioon

- Iga konstandiga seotakse mingi arv δ -reduktsiooni reegleid.
- Näide: Naturaalarvud $(0, 1, 2, \dots)$ ja liitmine $(+)$.

$+ 0 0$	$\longrightarrow_{\delta}$	0	$+ 1 0$	$\longrightarrow_{\delta}$	1
$+ 0 1$	$\longrightarrow_{\delta}$	1	$+ 1 1$	$\longrightarrow_{\delta}$	2
$\dots$			$\dots$		

- δ -reeglite lisamine võib kokkuvoolavuse ära rikkuda!