

Reduktsioon

Mõisted

- Relatsioon $R \subseteq \Lambda^2$ on **kooskõlaline** kui iga termi $M, N \in \Lambda$ ja üheaugulise konteksti $C[\cdot]$ korral:

$$(M, N) \in R \implies (C[M], C[N]) \in R$$

- Relatsiooni $R \subseteq \Lambda^2$ nimatatakse **võrduseks** (kongruentsiks) kui ta kooskõlaline ekvivalentsusrelatsioon.
- Relatsiooni $R \subseteq \Lambda^2$ nimetatakse **reduktsiooniks** kui ta kooskõlaline, refleksiivne ja transitiivne.

Reduksioon

Ühesammuline R -reduksioon

$$\frac{(M, N) \in R}{M \longrightarrow_R N}$$
$$\frac{M \longrightarrow_R N}{\lambda x. M \longrightarrow_R \lambda x. N}$$

$$\frac{M \longrightarrow_R N}{M Z \longrightarrow_R N Z}$$
$$\frac{M \longrightarrow_R N}{Z M \longrightarrow_R Z N}$$

R -reduksioon

$$\frac{M \longrightarrow_R N}{M \Longrightarrow_R N}$$
$$M \Longrightarrow_R M$$

$$\frac{M \Longrightarrow_R N \quad N \Longrightarrow_R L}{M \Longrightarrow_R L}$$

R -konversioon

$$\frac{M \Longrightarrow_R N}{M =_R N}$$

$$\frac{N =_R M}{M =_R N}$$

$$\frac{M =_R N \quad N =_R L}{M =_R L}$$

Reduktsioon

Väide

Relatsioonid $\longrightarrow_R$, $\Longrightarrow_R$ ja $=_R$ on kooskõlalised.

Lemma

$$N \Longrightarrow_R N' \implies M[N/x] \Longrightarrow_R M[N'/x]$$

NB!

Ei kehti $\longrightarrow_R$ korral! Näiteks kui $M \equiv x\ x$, $N \equiv (\lambda y.y)z$ ja $N' \equiv z$, siis

$$N \longrightarrow_\beta N', \text{ aga } (\lambda y.y)z((\lambda y.y)z) \not\longrightarrow_\beta zz$$

Reduktsioon

Mõisted

- Termi M nimetatakse **R -reedeksisks** kui $\exists N. (M, N) \in R$.
Termi N nimetatakse termi M **R -kontraktumiks**.
- Term M on **R -normaalkujul** kui ta sisalda ühtegi R -reedeksit.
- Termi N nimetatakse termi M **R -normaalkujuks** kui N on R -normaalkujul ja $M =_R N$.

Reduktsioon

Väide

$M \longrightarrow_R N \iff M \equiv C[P], N \equiv C[Q] \text{ ja } (P, Q) \in R.$

Järeldus

Olgu M R -normaalkujul, siis $M \Longrightarrow_R N \implies M \equiv N.$

NB!

Sellest et $\forall N [M \Longrightarrow_R N \Rightarrow M \equiv N]$ ei järeldu, et term M oleks R -normaalkujul.

Church-Rosseri teoreem

Mõisted

- Binaarne relatsioon $\triangleright$ on **rombi omadusega** ($\triangleright \models \diamond$) kui

$$\forall M, M_1, M_2 [M \triangleright M_1 \wedge M \triangleright M_2 \implies \exists M_3 [M_1 \triangleright M_3 \wedge M_2 \triangleright M_3]]$$

- Relatsioon R on **Church-Rosser** (CR) kui $\implies_R \models \diamond$

Church-Rosseri teoreem

$$\text{CR}(R) \wedge M =_R N \implies \exists Z [M \implies_R Z \wedge N \implies_R Z]$$

Järeldused

- Kui N on termi M R -normaalkuju, siis $M \implies_R N$.
- Igale termil saab olla ülimalt üks normaalkuju.

Church-Rosseri teoreem

Lemma

$\triangleright \models \Diamond \implies \triangleright^* \models \Diamond$, kus $\triangleright^*$ on $\triangleright$ transitiivne sulund

Hiidreduktsioon (grand reduction)

$$\begin{array}{c} M \implies_1 M \\ \hline M \implies_1 N \\ \hline \lambda x. M \implies_1 \lambda x. N \end{array} \qquad \begin{array}{c} M \implies_1 M' \quad N \implies_1 N' \\ \hline MN \implies_1 M'N' \\ \\ M \implies_1 M' \quad N \implies_1 N' \\ \hline (\lambda x. M)N \implies_1 M'[N'/x] \end{array}$$

Church-Rosseri teoreem

Lemma

- $M \Rightarrow_1 M', N \Rightarrow_1 N' \Rightarrow M[N/x] \Rightarrow_1 M'[N'/x];$
- $\lambda x.M \Rightarrow_1 N \Rightarrow N \equiv \lambda x.M',$ kus $M \Rightarrow_1 M';$
- $MN \Rightarrow_1 L$ järeldub:
 - kas $L \equiv M'N',$ kus $M \Rightarrow_1 M'$ ja $N \Rightarrow_1 N';$
 - või $M \equiv \lambda x.P, L \equiv P'[N'/x],$ kus $P \Rightarrow_1 P'$ ja $N \Rightarrow_1 N'.$

Lemma

$\Rightarrow_1 \models \Diamond$

Teoreem

$\Rightarrow_\beta$ on $\Rightarrow_1$ transitiivne sulund

Church-Rosseri teoreem

Mõisted

- Binaarne relatsioon $\triangleright$ on **nõrgalt rombi omadusega** kui

$$\forall M, M_1, M_2 [M \triangleright M_1 \wedge M \triangleright M_2 \implies \exists M_3 [M_1 \triangleright^*_{=} M_3 \wedge M_2 \triangleright^*_{=} M_3]]$$

kus $\triangleright^*_{=}$ on relatsiooni $\triangleright$ refleksiivne, transitiivne sulund.

- Relatsioon R on **nõrgalt Church-Rosser** (WCR) kui $\longrightarrow_R$ on nõrgalt rombi omadusega.
- Relatsioon R on **tugevalt normaliseeruv** (SN) kui ühegi termi M korral ei leidu lõpmatut reduktsioonijada.

Newmanni lemma

$$\text{SN} \wedge \text{WCR} \Rightarrow \text{CR}$$