

Reduktsioonistrateegiad

Reduktsioonijärjekorrad

- Normaalkuju saavutamine sõltub reduktsiooni järjekorrast!
- **Normaaljärjekord** — alati redutseeritakse kõige välimine vasakpoolne reedeks

$$\underline{(\lambda x.y)((\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx)))} \longrightarrow_{\beta} y$$

- **Aplikatiivne järjekord** — alati redutseeritakse kõige sisemine vasakpoolne reedeks

$$\begin{aligned} & (\lambda x.y)((\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx))) \\ \longrightarrow_{\beta} & \underline{(\lambda x.y)((\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx)))} \\ & \dots \end{aligned}$$

Standardiseerimisteoreem

Märgendatud λ -terminid

- $\Lambda_{\mathcal{A}}$ on märgendatud λ -termide hulk:
 - $x^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja x on muutuja;
 - $(\lambda x.M)^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja $M \in \Lambda_{\mathcal{A}}$;
 - $(MN)^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja $M, N \in \Lambda_{\mathcal{A}}$.
- **Märgenduseks** nimetatakse funktsiooni mis (märgendamata) termi iga alamtermiga seob märgendi.
- Märgendust nimetatakse **algmärgenduseks** kui erinevad alamtermid seotakse erinevate märgenditega.

Näide

$$((\lambda x.(x^1 x^2)^3)^4 (y^5 z^6)^7)^8$$

Standardiseerimisteoreem

Märgendatud β -reegel

$$((\lambda x.M)^a N)^b = M[N/x]$$

Märgendatud substituutsioon

$$\begin{aligned}x^a[N/x] &\equiv N \\y^a[N/x] &\equiv y^a \\(M_1 M_2)^a[N/x] &\equiv (M_1[N/x] M_2[N/x])^a \\(\lambda y.M)^a[N/x] &\equiv (\lambda y.M[N/x])^a\end{aligned}$$

Näide

$$((\lambda x.(x^1 x^2)^3)^4 (y^5 z^6)^7)^8 \longrightarrow_{\beta} ((y^5 z^6)^7 (y^5 z^6)^7)^3$$

Standardiseerimisteoreem

Reedeksi jäägid

- Olgu $M \longrightarrow N$, $\mathcal{I}$ termi M märgendus, $\mathcal{J}$ termi N märgendus ning Δ redutseeritava reedeksi märgend ($M \longrightarrow^\Delta N$):
 - alamtermi $T \in Sub(N)$ nimetatakse alamtermi $S \in Sub(M)$ **järglaseks** kui $\mathcal{I}(S) = \mathcal{J}(T)$;
 - reedeksi järglast nimetatakse selle reedeksi **jäägiks**;
 - redutseeritud reedeksil ei ole ühtegi jääki.

Näide

$$\begin{aligned} & (\lambda xy. (\lambda zw. xz)y) MN \\ & \longrightarrow_\beta (\lambda y. (\lambda zw. Mz)y) N \\ & \longrightarrow_\beta (\lambda zw. Mz) N \\ & \longrightarrow_\beta \lambda w. MN \end{aligned}$$

Standardiseerimisteoreem

Peanormaalkujud

- Term $M \in \Lambda$ on **peanormaalkujul** (HNF) kui

$$M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. x M_1 \dots M_m \quad n, m \geq 0$$

- Kui $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. (\lambda x. M_0) M_1 \dots M_m$, kus $n \geq 0$ ja $m \geq 1$, siis alamtermi $(\lambda x. M_0) M_1$ nimetatakse **peareedeksiks**
- Term $M \in \Lambda$ on **nõrgal peanormaalkujul** (WHNF) kui

$$M \equiv \begin{cases} x M_1 \dots M_n & n \geq 0 \\ \lambda x. M \end{cases}$$

Standardiseerimisteoreem

Standardreduktsioon

Standardreduktsiooniks nimatatakse reduktsioonijada

$$M_0 \longrightarrow^{\Delta_0} M_1 \longrightarrow^{\Delta_1} M_2 \longrightarrow^{\Delta_2} \dots$$

kus iga kahe reedeksi Δ_i ja Δ_j ($i > j$) korral Δ_i ei ole reedeksist Δ_j vasakul asuvate reedeksite jäägiks.

NB!

Normaaljärjekorras reduktsioon on standardreduktsioon!

Standardiseerimisteoreem

Lemma

$$M \Longrightarrow N \Rightarrow \exists Z [M \Longrightarrow_h Z \Longrightarrow_i N]$$

Standardiseerimisteoreem

$$M \Longrightarrow N \Rightarrow M \Longrightarrow_s N$$

Konstantidega lambda-arvutus

Konstantidega λ -arvutus

E	$::=$	V	muutuja
		C	konstant
		$(E_1 E_2)$	aplikatsioon
		$(\lambda V. E)$	abstraktsioon

Iga konstandiga seotakse mingi arv δ -reduktsiooni reegleid.

Näide

Naturaalarvud $(0, 1, 2, \dots)$ ja liitmine $(+)$

$+ 0 0$	$\longrightarrow_{\delta}$	0	$+ 1 0$	$\longrightarrow_{\delta}$	1
$+ 0 1$	$\longrightarrow_{\delta}$	1	$+ 1 1$	$\longrightarrow_{\delta}$	2
$\dots$			$\dots$		

NB!

δ -reeglite lisamine võib kokkuvoolavuse ära rikkuda!