

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus

Tüübid

Olgu U (loenduv) **tüübimuutujate** hulk; **lihtsate tüüpide** hulk Π on defineeritud järgneva grammatikaga:

$$\Pi := U \mid (\Pi \rightarrow \Pi)$$

Tüübimuutujaid tähistame $\alpha, \beta, \dots \in U$; tüüpe $\sigma, \tau, \dots \in \Pi$.

Kontekstid

Muutujast ja tüübist koosnevate paaride jada

$$\Gamma = \{x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n\}$$

Kontekstide hulka tähistame C ning konteksi Γ doomenit $\text{dom}(\Gamma) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Curry

Tüüpimine

Tüüpimisrelatsioon $\vdash \subseteq C \times \Lambda \times \Pi$ on defineeritud järgmiste tuletusreeglitega:

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau}$$

kus $x \notin \text{dom}(\Gamma)$.

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Curry

Definitsioon

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus **à la Curry** ($\lambda \rightarrow$ à la Curry) on kolmik $(\Lambda, \Pi, \vdash)$.

Näiteid

$$\vdash \lambda x.x : \sigma \rightarrow \sigma$$

$$\vdash \lambda x y.x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$$

$$\vdash \lambda x y z.x z (y z) : (\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho$$

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Curry

Näide

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash x : \sigma \rightarrow \tau \quad \frac{\Gamma \vdash y : \rho \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash z : \rho}{\Gamma \vdash yz : \sigma}}{\Gamma \vdash x(yz) : \tau}}{\Gamma_2 \vdash \lambda z.x(yz) : \rho \rightarrow \tau}}{\Gamma_1 \vdash \lambda yz.x(yz) : (\rho \rightarrow \sigma) \rightarrow \rho \rightarrow \tau}}{\vdash \lambda xyz.x(yz) : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow (\rho \rightarrow \sigma) \rightarrow \rho \rightarrow \tau}$$

kus

$$\Gamma_1 = \{x:\sigma \rightarrow \tau\}$$

$$\Gamma_2 = \{x:\sigma \rightarrow \tau, y:\rho \rightarrow \sigma\}$$

$$\Gamma = \{x:\sigma \rightarrow \tau, y:\rho \rightarrow \sigma, z:\rho\}$$

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Curry

Moodustamislemma

$$\begin{aligned}\Gamma \vdash x : \sigma &\Rightarrow x : \sigma \in \Gamma \\ \Gamma \vdash MN : \sigma &\Rightarrow \exists \tau [\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma \wedge \Gamma \vdash N : \tau] \\ \Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma &\Rightarrow \exists \tau, \rho [\Gamma, x : \tau \vdash M : \rho \wedge \sigma = \tau \rightarrow \rho]\end{aligned}$$

Subjektreduktsioon

Kui $\Gamma \vdash M : \sigma$ ja $M \Rightarrow N$, siis $\Gamma \vdash N : \sigma$.

Teoreem

Relatsioon $\Rightarrow$ on Church-Rosser.

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Church

Pseudotermid

Pseudotermide hulk Λ_Π on defineeritud grammatikaga:

$$\Lambda_\Pi := V \mid (\lambda V : \Pi. \Lambda_\Pi) \mid (\Lambda_\Pi \Lambda_\Pi)$$

Tüüpimine

Tüüpimisrelatsioon $\Vdash \subseteq C \times \Lambda_\Pi \times \Pi$

$$\begin{array}{c} \overline{\Gamma, x : \tau \Vdash x : \tau} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \Vdash M : \tau}{\Gamma \Vdash \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau} \\[2ex] \frac{\Gamma \Vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \Vdash N : \sigma}{\Gamma \Vdash M N : \tau} \end{array}$$

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Church

Definitsioon

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus **à la Church** ($\lambda \rightarrow$ à la Church) on kolmik $(\Lambda_\Pi, \Pi, \Vdash)$.

Näiteid

$$\Vdash \lambda x : \sigma. x : \sigma \rightarrow \sigma$$

$$\Vdash \lambda x : \sigma. \lambda y : \tau. x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$$

$$\begin{aligned} \Vdash \lambda x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho. \lambda y : \sigma \rightarrow \tau. \lambda z : \sigma. x z (y z) \\ : (\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho \end{aligned}$$

Lihtsalt tüübitud λ -arvutus à la Church

Moodustamislemma

$$\begin{aligned}\Gamma \Vdash x : \sigma &\Rightarrow x : \sigma \in \Gamma \\ \Gamma \Vdash MN : \sigma &\Rightarrow \exists \tau [\Gamma \Vdash M : \tau \rightarrow \sigma \wedge \Gamma \Vdash N : \tau] \\ \Gamma \Vdash \lambda x:\tau.M : \sigma &\Rightarrow \exists \rho [\Gamma, x : \tau \Vdash M : \rho \wedge \sigma = \tau \rightarrow \rho]\end{aligned}$$

Subjektreduktsioon

Kui $\Gamma \Vdash M : \sigma$ ja $M \Rightarrow N$, siis $\Gamma \Vdash N : \sigma$.

Teoreem

Relatsioon $\Rightarrow$ on Church-Rosser.

Tüüpide unikaalsus

- Kui $\Gamma \Vdash M : \sigma$ ja $\Gamma \Vdash M : \tau$, siis $\sigma = \tau$.
- Kui $\Gamma \Vdash M : \sigma$ ja $\Gamma \Vdash N : \tau$ ja $M = N$, siis $\sigma = \tau$.

Church vs. Curry

Definitsioon

Tüüpide **kustutamise** funktsioon $|\cdot| : \Lambda_{\Pi} \rightarrow \Lambda$

$$\begin{aligned} |x| &= x \\ |MN| &= |M| |N| \\ |\lambda x:\sigma. M| &= \lambda x. |M| \end{aligned}$$

Teoreem

Olgu $M, N \in \Lambda_{\Pi}$

- kui $M \longrightarrow N$, siis $|M| \longrightarrow |N|$;
- kui $\Gamma \Vdash M : \sigma$, siis $\Gamma \vdash |M| : \sigma$.

Church vs. Curry

Teoreem

Olgu $M, N \in \Lambda$

- kui $M \longrightarrow N$, siis iga $M' \in \Lambda_\Pi$ mille korral $|M'| = M$ leidub $N' \in \Lambda_\Pi$ nii et $|N'| = N$ ja $M' \longrightarrow N'$;
- kui $\Gamma \vdash M:\sigma$, siis leidub $M' \in \Lambda_\Pi$ nii et $|M'| = M$ ja $\Gamma \Vdash M':\sigma$.

Väljendusvõimsus

Definitsioon

Olgu $N = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$. Funktsioon $f : \mathbf{N}^m \rightarrow \mathbf{N}$ on **$\lambda \rightarrow$ -defineeritav** kui leidub $F \in \Lambda$ nii et $\vdash F : N \rightarrow \dots \rightarrow N$ ($m + 1$ korda) ja $F \underline{n_1} \dots \underline{n_m} = \underline{f(n_1, \dots, n_m)}$.

Teoreem

$\lambda \rightarrow$ -defineeritavad funktsioonid on täpselt laiendatud polünoomid.

Väljendusvõimsus

Laiendatud polünoomid

(1) *projektsioonid*: $U_i^m(n_1, \dots, n_m) = n_i$ ($1 \leq i \leq m$);

(2) *konstantfunktsioonid*: $k(n) = k$;

(3) *märgifunktsioon*: $\text{sg}(0) = 0$ ja $\text{sg}(m+1) = 1$;

(4) *liitmine*:

$$\begin{aligned}(f + g)(n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l) \\ = f(n_1, \dots, n_k) + g(m_1, \dots, m_l);\end{aligned}$$

(5) *korrutamine*:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l) \\ = f(n_1, \dots, n_k) \cdot g(m_1, \dots, m_l).\end{aligned}$$

Lahenduvus

Definitsioon

Termi M nimetatakse $(\lambda \rightarrow)$ **tüübitavaks** parajasti siis, kui leiduvad Γ ja τ mille korral $\Gamma \vdash M : \tau$.

Lemma

$\lambda \rightarrow$ tüübitavate termide klass on **lahenduv** (so. leidub algoritm, mis tuvastab kas antud term on tüübitav).

Lahenduvus

Nõrgalt normaliseeruvuse teoreem

Iga $\lambda \rightarrow$ tüübitav term omab nii β - kui ka $\beta\eta$ -normaalkuju.

Tugevalt normaliseeruvuse teoreem

Iga $\lambda \rightarrow$ tüübitavast termist lähtuv β - ($\beta\eta$ -) reduktsioonijada on lõplik.

Teoreem

$\lambda \rightarrow$ tüübitavate termide β - ($\beta\eta$ -) võrduse kontrollimiseks leidub otsustusprotseduur (so. algoritm, mis saades 2 tüübitud termi P ja Q , tuvastab kas $P = Q$).