Lambda-arvutus

Lambda-arvutus

λ-termide süntaks

$$
\begin{array}{rcll}
E & ::= & V & \text{muutuja} \\
 & | & (E_1\ E_2) & \text{aplikatsioon} \\
 & | & (\lambda V.\ E) & \text{abstraktsioon}
\end{array}
$$

Näiteid λ-termidest

$$
\begin{array}{ll}
(\lambda x.\ x) & (((\lambda x.\ (\lambda f.\ (f\ x)))\ y)(\lambda z.\ z)) \\
(\lambda x.\ y) & (\lambda x.\ ((\mathbf{add}\ x)\ \underline{1}))
\end{array}
$$

Sulgudest hoidumine

$$
\begin{array}{lcl}
E_1\ E_2\ \ldots\ E_n & \equiv & ((\ldots(E_1\ E_2)\ldots)E_n) \\
\lambda V.\ E_1\ E_2\ \ldots\ E_n & \equiv & (\lambda V.\ (E_1\ E_2\ \ldots\ E_n)) \\
\lambda V_1\ V_2\ \ldots\ V_n.\ E & \equiv & (\lambda V_1.\ (\lambda V_2.\ (\ldots(\lambda V_n.\ E)\ldots)))
\end{array}
$$

Lambda-arvutus

Vabad ja seotud muutujad

Muutuja x on vaba λ-termis E (so. $x \in \mathrm{FV}(E)$), kui ta ei asu sümboli λx mõjupiirkonnas. Vastasel korral on x seotud.

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{FV}(x) & = & \{x\} \\ \mathrm{FV}(E_1\ E_2) & = & \mathrm{FV}(E_1) \bigcup \mathrm{FV}(E_2) \\ \mathrm{FV}(\lambda x.\ E) & = & \mathrm{FV}(E)\ -\ \{x\} \end{array}$$

λ-termi E nimetatakse kinniseks kui $\mathrm{FV}(E) = \emptyset$

Näide

$$(\lambda x.\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{vaba}}}{y}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{seotud}}}{x})\ (\lambda y.\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{vaba}}}{x}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{seotud}}}{y})$$

Teooria λ

Aksioomid

$$M = M \qquad\qquad (\lambda x.\ M)\ N = M[N/x] \quad (\beta)$$

Tuletusreeglid

$$\frac{M = N}{N = M} \qquad\qquad \frac{M = N}{M Z = N Z}$$

$$\frac{M = N \quad N = L}{M = L} \qquad\qquad \frac{M = N}{Z M = Z N}$$

$$\frac{M = N}{\lambda x.\ M = \lambda x.\ N}\ (\xi)$$

NB!

Relatsiooni $=$ nimetatakse konversiooniks.

Teooria λ

β - konversioon

Vastab funktsiooni väljakutse väärtustamisele!

Näited

$$
\begin{array}{lcl}
(\lambda x.\ f\ x)\ E & = & f\ E \\
(\lambda x\ y.\ \mathbf{add}\ x\ y)\ \underline{3} & = & \lambda y.\ \mathbf{add}\ \underline{3}\ y \\
(\lambda y.\ \mathbf{add}\ \underline{3}\ y)\ \underline{4} & = & \mathbf{add}\ \underline{3}\ \underline{4} \\
(\lambda x\ y.\ \mathbf{add}\ x\ y)(\mathsf{square}\ y) & \neq & \lambda y.\ \mathbf{add}\ (\mathsf{square}\ y)\ y
\end{array}
$$

Teooria λ

Püsipunktiteoreem

$$\forall F \in \Lambda,\ \exists X \in \Lambda\ .\ F\,X = X$$

Tõestus

Olgu $W \equiv \lambda x.\ F(x\,x)$ ja $X \equiv W\,W$. Siis

$$X \equiv W\,W \equiv (\lambda x.\ F(x\,x))\,W = F(W\,W) \equiv F\,X$$

Näited

term	tema püsipunkt
$\lambda x\,y.\ x\,y$	$(\lambda x\,y.\ (x\,x)\,y)\,(\lambda x\,y.\ (x\,x)\,y)$
$\lambda x.\ x$	$(\lambda x.\ x\,x)\,(\lambda x.\ x\,x)$

Teooria λ

α-kongruents

Term M on α-kongruentne termiga N (tähistame $M \equiv_\alpha N$), kui M ja N on identsed muutujate ümbernimetamise täpsuseni.

Näited

$$
\begin{array}{lcl}
\lambda x.\ x & \equiv_\alpha & \lambda y.\ y \\
\lambda x.\ f\ x & \equiv_\alpha & \lambda z.\ f\ z \\
\lambda x.\ (\lambda y.\ y)\ x & \equiv_\alpha & \lambda y.\ (\lambda y.\ y)\ y \\
\lambda x\ y.\ \mathbf{add}\ x\ y & \not\equiv_\alpha & \lambda y\ y.\ \mathbf{add}\ y\ y
\end{array}
$$

Konventsioon

Kõik seotud muutujad on vabadest muutujatest erinevad.

Teooria λ

Substitutsioon

Muutuja x substitutsiooniks termiga E nimetatakse muutuja x kõigi vabade esinemiste asendamist termiga E selliselt, et kõik termi E vabad muutujad on ka pärast asendamist vabad.

Substitutsiooni definitsioon

E	$E[E'/x]$
x	E'
y	y
$E_1\ E_2$	$E_1[E'/x]\ E_2[E'/x]$
$\lambda y.\ E_1$	$\lambda y.\ E_1[E'/x]$

Substitutsioon

Substitutsiooni definitsioon a'la Church

E	$E[E'/x]$
x	E'
y	y
$E_1 E_2$	$E_1[E'/x]\ E_2[E'/x]$
$\lambda x.\ E_1$	$\lambda x.\ E_1$
$\lambda y.\ E_1 \quad (y \notin \mathrm{FV}(E'))$	$\lambda y.\ E_1[E'/x]$
$\lambda y.\ E_1 \quad (y \in \mathrm{FV}(E'))$	$\lambda z.\ E_1[z/y][E'/x]$
	z on uus muutuja

Substitutsioon

Substitutsiooni lemma

Kui x ja y on erinevad muutujad ning $x \notin \mathrm{FV}(L)$, siis

$$M[N/x][L/y] \equiv M[L/y][N[L/y]/x]$$

Substitutsiooni omadusi

$$\begin{array}{lcl} M = M' & \Rightarrow & M[N/x] = M'[N/x] \\ N = N' & \Rightarrow & M[N/x] = M[N'/x] \end{array}$$

Ilmutatud viidatavus (Leibniz)

Olgu $C[\cdot]$ mingi kontekst, siis

$$M = N \quad \Rightarrow \quad C[M] = C[N]$$

Ekstensionaalsus

Teooria $\lambda + \mathrm{ext}$

$$\frac{M\,x = N\,x}{M = N} \qquad x \notin \mathrm{FV}(M\,N) \qquad (\mathbf{ext})$$

Teooria $\lambda + \eta$

$$\lambda x.\ M\,x = M \qquad x \notin \mathrm{FV}(M) \qquad (\eta)$$

Näited

$$\begin{array}{lcl} \lambda x.\ (\lambda y.\ y)\ x & = & \lambda y.\ y \\ \lambda x.\ \mathbf{add}\ x & = & \mathbf{add} \\ \lambda x.\ \mathbf{add}\ x\ x & \neq & \mathbf{add}\ x \end{array}$$

Lemma

Teooriad $\lambda + \mathbf{ext}$ ja $\lambda + \eta$ on ekvivalentsed.

Reduktsioon

Mõisted

- Reduktsioon on ainult vasakult paremale rakendatav konversioon; paremalt vasakule — ekspansioon.
- Alamtermi, millele saab rakendada reduktsioonireeglit nim. reedeksiks.
- Ilma ühtegi reedeksita term on normaalkujul.

Näide

$$\underbrace{\overbrace{(\lambda x.\ \underbrace{(\lambda x.\ x)\ (\lambda x.\ x)}_{\beta\text{-reedeks}}\ x)}^{\eta\text{-reedeks}}\ \underline{1}}_{\beta\text{-reedeks}}$$

Reduktsioon

Mõisted

- Relatsioon $R \subseteq \Lambda^2$ on kooskõlaline kui iga termi $M, N \in \Lambda$ ja üheaugulise konteksti $C[\cdot]$ korral:

$$(M, N) \in R \implies (C[M], C[N]) \in R$$

- Relatsiooni $R \subseteq \Lambda^2$ nimatatakse võrduseks (kongruentsiks) kui ta on kooskõlaline ekvivalentsusrelatsioon.
- Relatsiooni $R \subseteq \Lambda^2$ nimetatakse reduktsiooniks kui ta on kooskõlaline, refleksiivne ja transitiivne.

Reduktsioon

Ühesammuline R-reduktsioon

$$\frac{(M, N) \in R}{M \longrightarrow_R N} \qquad \frac{M \longrightarrow_R N}{M\,Z \longrightarrow_R N\,Z}$$

$$\frac{M \longrightarrow_R N}{\lambda x.\ M \longrightarrow_R \lambda x.\ N} \qquad \frac{M \longrightarrow_R N}{Z\,M \longrightarrow_R Z\,N}$$

R-reduktsioon

$$\frac{M \longrightarrow_R N}{M \Longrightarrow_R N} \qquad M \Longrightarrow_R M \qquad \frac{M \Longrightarrow_R N \quad N \Longrightarrow_R L}{M \Longrightarrow_R L}$$

R-konversioon

$$\frac{M \Longrightarrow_R N}{M =_R N} \qquad \frac{N =_R M}{M =_R N} \qquad \frac{M =_R N \quad N =_R L}{M =_R L}$$

Reduktsioon

Väide

Relatsioonid $\longrightarrow_R$, $\Longrightarrow_R$ ja $=_R$ on kooskõlalised.

Lemma

$$N \Longrightarrow_R N' \quad \Longrightarrow \quad M[N/x] \Longrightarrow_R M[N'/x]$$

NB!

Ei kehti $\longrightarrow_R$ korral! Näiteks kui $M \equiv x\,x$, $N \equiv (\lambda y.y)z$ ja $N' \equiv z$, siis

$$N \longrightarrow_\beta N', \quad \text{aga} \quad (\lambda y.y)z((\lambda y.y)z) \not\longrightarrow_\beta zz$$

Reduktsioon

Mõisted

- Termi M nimetatakse R-reedeksisks kui $\exists N.(M, N) \in R$. Termi N nimetatakse termi M R-kontraktumiks.
- Term M on R-normaalkujul kui ta sisalda ühtegi R-reedeksit.
- Termi N nimetatakse termi M R-normaalkujuks kui N on R-normaalkujul ja $M =_R N$.

Reduktsioon

Väide

$M \longrightarrow_R N \iff M \equiv C[P], N \equiv C[Q]$ ja $(P, Q) \in R$.

Järeldus

Olgu M R-normaalkujul, siis $M \Longrightarrow_R N \implies M \equiv N$.

NB!

Sellest et $\forall N [M \Longrightarrow_R N \implies M \equiv N]$ ei järeldu, et term M oleks R-normaalkujul.

Church-Rosseri teoreem

Mõisted

- Binaarne relatsioon $\triangleright$ on rombi omadusega ($\triangleright \models \lozenge$) kui

$$\forall M, M_1, M_2 [M \triangleright M_1 \wedge M \triangleright M_2 \implies \exists M_3 [M_1 \triangleright M_3 \wedge M_2 \triangleright M_3]]$$

- Relatsioon R on Church-Rosser (CR) kui $\Longrightarrow_R \models \lozenge$

Church-Rosseri teoreem

$$\mathrm{CR}(R) \wedge M =_R N \implies \exists Z [M \Longrightarrow_R Z \wedge N \Longrightarrow_R Z]$$

Järeldused

- Kui N on termi M R-normaalkuju, siis $M \Longrightarrow_R N$.
- Igal termil saab olla ülimalt üks normaalkuju.

Church-Rosseri teoreem

Lemma

$\rhd \models \Diamond \implies \rhd^* \models \Diamond$, kus $\rhd^*$ on $\rhd$ transitiivne sulund

Hiidreduktsioon (grand reduction)

$$M \Longrightarrow_1 M$$

$$\frac{M \Longrightarrow_1 N}{\lambda x.\ M \Longrightarrow_1 \lambda x.\ N}$$

$$\frac{M \Longrightarrow_1 M' \quad N \Longrightarrow_1 N'}{M\,N \Longrightarrow_1 M'\,N'}$$

$$\frac{M \Longrightarrow_1 M' \quad N \Longrightarrow_1 N'}{(\lambda x.M)N \Longrightarrow_1 M'[N'/x]}$$

Church-Rosseri teoreem

Lemma

- $M \Longrightarrow_1 M', N \Longrightarrow_1 N' \implies M[N/x] \Longrightarrow_1 M'[N'/x]$;
- $\lambda x.M \Longrightarrow_1 N \implies N \equiv \lambda x.M'$, kus $M \Longrightarrow_1 M'$;
- $M N \Longrightarrow_1 L$ järeldub:
  - kas $L \equiv M'N'$, kus $M \Longrightarrow_1 M'$ ja $N \Longrightarrow_1 N'$;
  - või $M \equiv \lambda x.P$, $L \equiv P'[N'/x]$, kus $P \Longrightarrow_1 P'$ ja $N \Longrightarrow_1 N'$.

Lemma

$\Longrightarrow_1 \models \Diamond$

Teoreem

$\Longrightarrow_\beta$ on $\Longrightarrow_1$ transitiivne sulund

Church-Rosseri teoreem

Mõisted

- Binaarne relatsioon $\rhd$ on nõrgalt rombi omadusega kui iga M, M_1 ja M_2 korral

$$M \rhd M_1 \wedge M \rhd M_2 \implies \exists M_3[M_1 \rhd^*_= M_3 \wedge M_2 \rhd^*_= M_3]$$

  kus $\rhd^*_=$ on relatsiooni $\rhd$ refleksiivne ja transitiivne sulund.
- Relatsioon R on nõrgalt Church-Rosser (WCR) kui $\longrightarrow_R$ on nõrgalt rombi omadusega.
- Relatsioon R on tugevalt normaliseeruv (SN) kui ühegi termi M korral ei leidu lõpmatut reduktsioonijada.

Newmanni lemma

$$\mathrm{SN} \wedge \mathrm{WCR} \Rightarrow \mathrm{CR}$$

Reduktsioonistrateegiad

Reduktsioonijärjekorrad

- Normaalkuju saavutamine sõltub reduktsiooni järjekorrast!
- Normaaljärjekord — alati redutseeritakse kõige välimine vasakpoolne reedeks

$$\underline{(\lambda x.y)((\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx)))} \longrightarrow_\beta y$$

- Aplikatiivne järjekord — alati redutseeritakse kõige sisemine vasakpoolne reedeks

$$\begin{array}{ll} & (\lambda x.y)(\underline{(\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx))}) \\ \longrightarrow_\beta & (\lambda x.y)(\underline{(\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx))}) \\ \ldots & \end{array}$$

Standardiseerimisteoreem

Märgendatud λ-termid

- $\Lambda_{\mathcal{A}}$ on märgendatud λ-termide hulk:
  - $x^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja x on muutuja;
  - $(\lambda x.M)^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja $M \in \Lambda_{\mathcal{A}}$;
  - $(MN)^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja $M, N \in \Lambda_{\mathcal{A}}$.
- Märgenduseks nimetatakse funktsiooni mis (märgendamata) termi iga alamtermiga seob märgendi.
- Märgendust nimetatakse algmärgenduseks kui erinevad alamtermid seotakse erinevate märgenditega.

Näide

$$((\lambda x.(x^1 x^2)^3)^4 \; (y^5 z^6)^7)^8$$

Standardiseerimisteoreem

Märgendatud β-reegel

$$((\lambda x.M)^a N)^b = M[N/x]$$

Märgendatud substitutsioon

$$\begin{array}{lcl}
x^a[N/x] & \equiv & N \\
y^a[N/x] & \equiv & y^a \\
(M_1 M_2)^a[N/x] & \equiv & (M_1[N/x] M_2[N/x])^a \\
(\lambda y.M)^a[N/x] & \equiv & (\lambda y.M[N/x])^a
\end{array}$$

Näide

$$((\lambda x.(x^1 x^2)^3)^4 \ (y^5 z^6)^7)^8 \ \longrightarrow_\beta \ ((y^5 z^6)^7 \ (y^5 z^6)^7)^3$$

Standardiseerimisteoreem

Reedeksi jäägid

- Olgu $M \longrightarrow N$, $\mathcal{I}$ termi M märgendus, $\mathcal{J}$ termi N märgendus ning Δ redutseeritava reedeksi märgend ($M \longrightarrow^{\Delta} N$):
  - alamtermi $T \in Sub(N)$ nimetatakse alamtermi $S \in Sub(M)$ järglaseks kui $\mathcal{I}(S) = \mathcal{J}(T)$;
  - reedeksi järglast nimetatakse selle reedeksi jäägiks;
  - redutseeritud reedeksil ei ole ühtegi jääki.

Näide

$$
\begin{array}{l}
(\lambda xy.\underline{(\lambda zw.xz)y})MN \\
\longrightarrow_\beta (\lambda y.\underline{(\lambda zw.Mz)y})N \\
\longrightarrow_\beta \underline{(\lambda zw.Mz)N} \\
\longrightarrow_\beta \lambda w.MN
\end{array}
$$

Standardiseerimisteoreem

Peanormaalkujud

- Term $M \in \Lambda$ on peanormaalkujul (HNF) kui

$$M \equiv \lambda x_1 \ldots x_n . x M_1 \ldots M_m \qquad n, m \geqslant 0$$

- Kui $M \equiv \lambda x_1 \ldots x_n . (\lambda x . M_0) M_1 \ldots M_m$, kus $n \geqslant 0$ ja $m \geqslant 1$, siis alamtermi $(\lambda x . M_0) M_1$ nimetatakse peareedeksiks
- Term $M \in \Lambda$ on nõrgal peanormaalkujul (WHNF) kui

$$M \equiv \begin{cases} x M_1 \ldots M_n & n \geqslant 0 \\ \lambda x . M \end{cases}$$

Standardiseerimisteoreem

Standardreduktsioon

Standardreduktsiooniks nimatatakse reduktsioonijada

$$M_0 \longrightarrow^{\Delta_0} M_1 \longrightarrow^{\Delta_1} M_2 \longrightarrow^{\Delta_2} \ldots$$

kus iga kahe reedeksi Δ_i ja Δ_j $(i > j)$ korral Δ_i ei ole reedeksist Δ_j vasakul asuvate reedeksite jäägiks.

NB!

Normaaljärjekorras reduktsioon on standardreduktsioon!

Standardiseerimisteoreem

Lemma

$$M \Longrightarrow N \Rightarrow \exists Z[M \Longrightarrow_h Z \Longrightarrow_i N]$$

Standardiseerimisteoreem

$$M \Longrightarrow N \Rightarrow M \Longrightarrow_s N$$

Konstantidega lambda-arvutus

Konstantidega λ-arvutus

$$
\begin{array}{rclcl}
E & ::= & V & \qquad & \text{muutuja} \\
 & | & C & & \text{konstant} \\
 & | & (E_1\ E_2) & & \text{aplikatsioon} \\
 & | & (\lambda V.\ E) & & \text{abstraktsioon}
\end{array}
$$

Iga konstandiga seotakse mingi arv δ-reduktsiooni reegleid.

Näide

Naturaalarvud $(0, 1, 2, \ldots)$ ja liitmine $(+)$

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
+\ 0\ 0 & \longrightarrow_\delta & 0 & +\ 1\ 0 & \longrightarrow_\delta & 1 \\
+\ 0\ 1 & \longrightarrow_\delta & 1 & +\ 1\ 1 & \longrightarrow_\delta & 2 \\
 & \ldots & & & \ldots &
\end{array}
$$

NB!

δ-reeglite lisamine võib kokkuvoolavuse ära rikkuda!

De Bruijn'i λ-arvutus

De Bruijn'i λ-termid

Muutujad on asendatud siduva λ kaugusega

$$
\begin{array}{rcll}
E & ::= & N & \text{muutuja} \\
  & \mid & (E_1\ E_2) & \text{aplikatsioon} \\
  & \mid & (\lambda\ E) & \text{abstraktsioon}
\end{array}
$$

Näited

$$
\begin{array}{lcl}
\lambda x.\ x & \leftrightarrow & \lambda 1 \\
\lambda x\ y.\ x\ y & \leftrightarrow & \lambda\lambda 21 \\
\lambda x\ y.\ x\ y\ (\lambda y.\ x\ y\ y) & \leftrightarrow & \lambda\lambda 21(\lambda 311) \\
\lambda x.\ x\ (\lambda y.\ x\ y\ y) & \leftrightarrow & \lambda 1(\lambda 211)
\end{array}
$$

De Bruijn'i λ-arvutus

β-konversioon

$$(\lambda M)\, N = M[N/1]$$

Substitutsiooni definitsioon

$$
\begin{array}{rcll}
m[N/n] & = & m & \text{if } m < n \\
 & & m-1 & \text{if } m > n \\
 & & \mathit{shift}_{n,1}(N) & \text{if } m = n \\
(M_1\ M_2)[N/n] & = & (M_1[N/n])\ (M_2[N/n]) & \\
(\lambda\, M)[N/n] & = & \lambda(M[N/n+1]) & \\
\\
\mathit{shift}_{n,i}(j) & = & j & \text{if } j < i \\
 & & j+n-1 & \text{if } j \geqslant i \\
\mathit{shift}_{n,i}(N_1\ N_2) & = & \mathit{shift}_{n,i}(N_1)\ \mathit{shift}_{n,i}(N_2) & \\
\mathit{shift}_{n,i}(\lambda\, N) & = & \lambda\ \mathit{shift}_{n,i+1}(N) &
\end{array}
$$

Kombinaatorloogika

Väide

Olgu $M(\vec{x})$ mingi λ-term mis sisaldab vabu muutujaid $\vec{x}$. Siis leidub term F selline, et $F\,\vec{x} = M(\vec{x})$.

Kombinaatortermide süntaks

$$E \quad ::= \quad \mathbf{I} \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{S} \mid (E_1 E_2)$$

Reduktsioonireeglid

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{I}\ x & \longrightarrow & x \\ \mathbf{K}\ x\ y & \longrightarrow & x \\ \mathbf{S}\ f\ g\ x & \longrightarrow & f\ x\ (g\ x) \end{array}$$

NB!

Identsuskombinaator on teistest defineeritav: $\mathbf{SKK} = \mathbf{I}$

Kombinaatorloogika

Teooria CL

- Aksioomid

$$P = P \qquad \mathbf{K}\ P\ Q = P \qquad \mathbf{S}\ P\ Q\ R = P\ R\ (Q\ R)$$

- Tuletusreeglid

$$\frac{P = Q}{Q = P} \qquad \frac{P = Q}{PR = QR}$$

$$\frac{P = Q \quad Q = R}{P = R} \qquad \frac{P = Q}{RP = RQ}$$

Kombinaatorloogika ja λ-arvutus

$CL \Rightarrow \Lambda$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{I} & \equiv & \lambda x.\ x \\
\mathbf{K} & \equiv & \lambda x\ y.\ x \\
\mathbf{S} & \equiv & \lambda f\ g\ x.\ f\ x\ (g\ x)
\end{array}
$$

Abstraktsioon

$$
\begin{array}{lcl}
[x]\ x & \equiv & \mathbf{I} \\
[x]\ y & \equiv & \mathbf{K}\ y \\
[x]\ c & \equiv & \mathbf{K}\ c \\
[x]\ (E_1\ \ E_2) & \equiv & \mathbf{S}\ ([x]\ \ E_1)\ ([x]\ \ E_2)
\end{array}
$$

Kombinaatorloogika ja λ-arvutus

$\Lambda \Rightarrow CL$

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{C}[\![x]\!] & = & x \\
\mathcal{C}[\![c]\!] & = & c \\
\mathcal{C}[\![(E_1\ E_2)]\!] & = & (\mathcal{C}[\![E_1]\!])\ (\mathcal{C}[\![E_2]\!]) \\
\mathcal{C}[\![(\lambda x.\ E)]\!] & = & [x]\ (\mathcal{C}[\![E]\!])
\end{array}$$

Näide

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\mathcal{C}[\![(\lambda x\ y.\ y\ x)]\!]} \\
= & [x]\ ([y]\ (y\ x)) \\
= & [x]\ (\mathbf{S}\ ([y]\ y)\ ([y]\ x)) \\
= & [x]\ (\mathbf{S}\ \mathbf{I}\ (\mathbf{K}\ x)) \\
= & \mathbf{S}\ ([x]\ \mathbf{S}\ \mathbf{I})\ ([x]\ \mathbf{K}\ x) \\
= & \mathbf{S}\ (\mathbf{S}\ ([x]\ \mathbf{S})\ ([x]\ \mathbf{I}))\ (\mathbf{S}\ ([x]\ \mathbf{K})\ ([x]\ x)) \\
= & \mathbf{S}\ (\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ \mathbf{S})\ (\mathbf{K}\ \mathbf{I}))\ (\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ \mathbf{K})\ \mathbf{I})
\end{array}$$

Kombinaatorloogika ja λ-arvutus

Lemma

$CL \vdash P = Q \implies \lambda \vdash P_\lambda = Q_\lambda$

NB!

Vastupidine ei kehti!! (Näiteks: $\mathbf{SK} \neq \mathbf{KI}$)

Curry aksioomid

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{K} = \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{KS})(\mathbf{S}(\mathbf{KK})\mathbf{K}))(\mathbf{K}(\mathbf{SKK}))\\
&\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{KS})(\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{S}(\mathbf{KS})))(\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{S}(\mathbf{KK})))\mathbf{S})))(\mathbf{K}(\mathbf{K}(\mathbf{SKK})))\\
&\mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{KS})(\mathbf{S}(\mathbf{KK})(\mathbf{S}(\mathbf{KS})\mathbf{K})))(\mathbf{KK}) = \mathbf{S}(\mathbf{KK})\\
&\mathbf{S}(\mathbf{KS})(\mathbf{S}(\mathbf{KK})) = \mathbf{S}(\mathbf{KK})(\mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{KS})(\mathbf{S}(\mathbf{KK})(\mathbf{SKK})))(\mathbf{K}(\mathbf{SKK})))\\
&\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{S}(\mathbf{KS})))(\mathbf{S}(\mathbf{KS})(\mathbf{S}(\mathbf{KS})))\\
&\qquad = \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{KS})(\mathbf{S}(\mathbf{KK})(\mathbf{S}(\mathbf{KS})(\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{S}(\mathbf{KS})))\mathbf{S}))))(\mathbf{KS})
\end{aligned}
$$

Optimiseerimised

NB!

Kombinaatortermi suurus on eksponentsiaalne esialgse termi argumentide arvust!

Kombinaatorid B ja C

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{B} & \equiv & \mathbf{S(KS)K} \\ \mathbf{C} & \equiv & \mathbf{S(BS(BKS))(KK)} \end{array}$$

Reduktsioonireeglid

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{B}\ f\ g\ x & \longrightarrow & f\ (g\ x) \\ \mathbf{C}\ f\ g\ x & \longrightarrow & f\ x\ g \end{array}$$

Optimiseerimised

Optimiseerimisreeglid

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ p)\ (\mathbf{K}\ q) & = & \mathbf{K}\ (p\ q) \\
\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ p)\ \mathbf{I} & = & p \\
\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ p)\ q & = & \mathbf{B}\ p\ q \\
\mathbf{S}\ p\ (\mathbf{K}\ q) & = & \mathbf{C}\ p\ q
\end{array}
$$

Näide

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{C}[\![(\lambda x\ y.\ y\ x)]\!] & = & [x]\ (\mathbf{S}\ \mathbf{I}\ (\mathbf{K}\ x)) \\
 & = & [x]\ (\mathbf{C}\ \mathbf{I}\ x) \\
 & = & \mathbf{S}\ ([x](\mathbf{C}\ \mathbf{I})\ ([x]x)) \\
 & = & \mathbf{S}\ (\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ \mathbf{C})\ (\mathbf{K}\ \mathbf{I}))\ \mathbf{I} \\
 & = & \mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ (\mathbf{C}\ \mathbf{I}))\ \mathbf{I} \\
 & = & \mathbf{C}\ \mathbf{I}
\end{array}
$$

Optimiseerimised

NB!

Optimiseeritud kombinaatortermi suurus on esialgse termi ruut!

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{C}[\![\lambda x_1 . p\ q]\!] & = & \mathbf{S}\ p_1\ q_1 \\
\mathcal{C}[\![\lambda x_2 x_1 . p\ q]\!] & = & \mathbf{S}\ (\mathbf{B}\ \mathbf{S}\ p_2)\ q_2 \\
\mathcal{C}[\![\lambda x_3 x_2 x_1 . p\ q]\!] & = & \mathbf{S}\ (\mathbf{B}\ \mathbf{S}\ (\mathbf{B}\ (\mathbf{B}\ \mathbf{S})\ p_3))\ q_3 \\
\mathcal{C}[\![\lambda x_4 x_3 x_2 x_1 . p\ q]\!] & = & \mathbf{S}\ (\mathbf{B}\ \mathbf{S}\ (\mathbf{B}\ (\mathbf{B}\ \mathbf{S})\ (\mathbf{B}\ (\mathbf{B}\ (\mathbf{B}\ \mathbf{S}))\ p_4)))\ q_4
\end{array}
$$

Optimiseerimised

Turneri kombinaatorid

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{S}' \; c \; f \; g \; x & \longrightarrow & c \; (f \; x) \; (g \; x) \\
\mathbf{B}' \; c \; f \; g \; x & \longrightarrow & c \; f \; (g \; x) \\
\mathbf{C}' \; c \; f \; g \; x & \longrightarrow & c \; (f \; x) \; g \\
\mathbf{B}^\star \; c \; f \; g \; x & \longrightarrow & c \; (f \; (g \; x))
\end{array}$$

Optimiseerimisreeglid

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{S} \; (\mathbf{K} \; p) \; (\mathbf{K} \; q) & = & \mathbf{K} \; (p \; q) \\
\mathbf{S} \; (\mathbf{K} \; p) \; \mathbf{I} & = & p \\
\mathbf{S} \; (\mathbf{K} \; p) \; (\mathbf{B} \; q \; r) & = & \mathbf{B}^\star \; p \; q \; r \\
\mathbf{S} \; (\mathbf{K} \; p) \; q & = & \mathbf{B} \; p \; q \\
\mathbf{S} \; (\mathbf{B} \; p \; q) \; (\mathbf{K} \; r) & = & \mathbf{C}' \; p \; q \; r \\
\mathbf{S} \; p \; (\mathbf{K} \; q) & = & \mathbf{C} \; p \; q \\
\mathbf{S} \; (\mathbf{B} \; p \; q) \; r & = & \mathbf{S}' \; p \; q \; r
\end{array}$$

Andmete esitamine λ-arvutuses

Baaskombinaatorid

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{I} & \equiv & \lambda x.\ x \\
\mathbf{K} & \equiv & \lambda x\ y.\ x \\
\mathbf{S} & \equiv & \lambda f\ g\ x.\ f\ x\ (g\ x)
\end{array}
$$

"Astendamine"

$$
\begin{array}{lcl}
E^0\,E' & \equiv & E' \\
E^n\,E' & \equiv & \underbrace{E(E(\ldots(E}_{n\ \text{tükki}}\ E')\ldots))
\end{array}
$$

NB!

$$
E^n(E\ E') \equiv E^{n+1}E' \equiv E\ (E^n\,E')
$$

Tõeväärtused

Spetsifikatsioon

$$
\begin{array}{lcl}
\textbf{not true} & = & \textbf{false} \\
\textbf{not false} & = & \textbf{true}
\end{array}
$$

Definitsioon

$$
\begin{array}{lcl}
\textbf{true} & \equiv & \lambda xy.\ x \qquad\qquad (\equiv \ \ \mathbf{K}) \\
\textbf{false} & \equiv & \lambda xy.\ y \\
\textbf{not} & \equiv & \lambda t.\ t\ \textbf{false}\ \textbf{true}
\end{array}
$$

Näide

$$
\begin{array}{lcl}
\textbf{not true} & \equiv & (\lambda t.\ t\ \textbf{false}\ \textbf{true})\ \textbf{true} \\
 & \longrightarrow & \textbf{true}\ \textbf{false}\ \textbf{true} \\
 & \equiv & (\lambda x.\ \lambda y.\ x)\ \textbf{false}\ \textbf{true} \\
 & \longrightarrow & (\lambda y.\ \textbf{false})\ \textbf{true} \\
 & \longrightarrow & \textbf{false}
\end{array}
$$

Tingimuslause

Spetsifikatsioon

$$
\begin{aligned}
\mathbf{cond}\ \mathbf{true}\ E_1\ E_2 &= E_1 \\
\mathbf{cond}\ \mathbf{false}\ E_1\ E_2 &= E_2
\end{aligned}
$$

Definitsioon

$$\mathbf{cond} \equiv \lambda t\ x\ y.\ t\ x\ y$$

Näide

$$
\begin{aligned}
\mathbf{cond}\ \mathbf{false}\ E_1\ E_2 &\equiv (\lambda t\ x\ y.\ t\ x\ y)\ \mathbf{false}\ E_1\ E_2 \\
&\Longrightarrow \mathbf{false}\ E_1\ E_2 \\
&\equiv (\lambda x\ y.\ y)\ E_1\ E_2 \\
&\Longrightarrow E_2
\end{aligned}
$$

Paarid ja ennikud

Paarid

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{fst} & \equiv & \lambda p.\ p\ \mathbf{true} \\
\mathbf{snd} & \equiv & \lambda p.\ p\ \mathbf{false} \\
(E_1, E_2) & \equiv & \lambda f.\ f\ E_1\ E_2
\end{array}$$

Ennikud

$$\begin{array}{lcl}
(E_1, \ldots, E_n) & \equiv & (E_1, (\ldots (E_{n-1}, E_n) \ldots)) \\
E \overset{n}{\downarrow} 1 & \equiv & \mathbf{fst}\ E \\
E \overset{n}{\downarrow} 2 & \equiv & \mathbf{fst}\ (\mathbf{snd}\ E) \\
 & \ldots & \\
E \overset{n}{\downarrow} i & \equiv & \mathbf{fst}\ (\mathbf{snd}^{i-1} E) \\
 & \ldots & \\
E \overset{n}{\downarrow} n & \equiv & \mathbf{snd}^{n-1}\ E
\end{array}$$

Naturaalarvud

Standardnumbrid

$$
\begin{array}{lcll}
\ulcorner 0 \urcorner & \equiv & \lambda x.\ x & (\equiv \ \mathbf{I}) \\
\ulcorner n{+}1 \urcorner & \equiv & (\mathbf{false}, \ulcorner n \urcorner) & \\
\mathbf{succ} & \equiv & \lambda n.\ (\mathbf{false}, n) & \\
\mathbf{pred} & \equiv & \lambda n.\ n\ \mathbf{false} & (\equiv \ \mathbf{snd}) \\
\mathbf{iszero} & \equiv & \lambda n.\ n\ \mathbf{true} & (\equiv \ \mathbf{fst})
\end{array}
$$

Liitmine (?!)

$$
\mathbf{add} \quad = \quad \lambda x\ y.\ \mathbf{cond}(\mathbf{iszero}\ x)\ y\ (\mathbf{add}(\mathbf{pred}\ x)(\mathbf{succ}\ y))
$$

Naturaalarvud

Church'i numbrid

$$\begin{array}{lcl} \underline{n} & \equiv & \lambda f\ x.\ f^n\ x \\ \mathbf{succ} & \equiv & \lambda n.\ \lambda f\ x.\ n\ f\ (f\ x) \\ \mathbf{iszero} & \equiv & \lambda n.\ n\ (\lambda x.\ \mathbf{false})\ \mathbf{true} \\ \mathbf{add} & \equiv & \lambda m\ n.\ \lambda f\ x.\ m\ f\ (n\ f\ x) \end{array}$$

Näide

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{add}\ \underline{2}\ \underline{1} & \equiv & (\lambda m\ n.\ \lambda f\ x.\ m\ f\ (n\ f\ x))\ \underline{2}\ \underline{1} \\ & \Longrightarrow & \lambda f\ x.\ \underline{2}\ f\ (\underline{1}\ f\ x) \\ & \Longrightarrow & \lambda f\ x.\ f\ (f\ (\underline{1}\ f\ x)) \\ & \Longrightarrow & \lambda f\ x.\ f\ (f\ (f\ x)) \\ & \equiv & \underline{3} \end{array}$$

Korrutamine ja astendamine

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{mul} & \equiv & \lambda m\ n.\ \lambda f\ x.\ m\ (n\ f)\ x \\ \mathbf{exp} & \equiv & \lambda m\ n.\ \lambda f\ x.\ n\ m\ f\ x \end{array}$$

Naturaalarvud

Ühe lahutamine — abifunktsiooni spetsifikatsioon

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{prefn}\ f\ (\mathbf{true}, x) & = & (\mathbf{false}, x) \\
\mathbf{prefn}\ f\ (\mathbf{false}, x) & = & (\mathbf{false}, f\ x) \\
(\mathbf{prefn}\ f)^n\ (\mathbf{false}, x) & = & (\mathbf{false}, f^n\ x) \\
(\mathbf{prefn}\ f)^n\ (\mathbf{true}, x) & = & (\mathbf{false}, f^{n-1}\ x)
\end{array}
$$

Ühe lahutamine — definitsioon

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{prefn} & \equiv & \lambda f\, p.\, (\mathbf{false}, (\mathbf{cond}\, (\mathbf{fst}\, p)\, (\mathbf{snd}\, p)\, (f\, (\mathbf{snd}\, p)))) \\
\mathbf{pred} & \equiv & \lambda n.\, \lambda f\, x.\, \mathbf{snd}\, (n\, (\mathbf{prefn}\, f)\, (\mathbf{true}, x))
\end{array}
$$

Näide

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{pred}\ \underline{n}\ f\ x & = & \mathbf{snd}\ (\underline{n}\ (\mathbf{prefn}\ f)\ (\mathbf{true}, x)) \\
 & = & \mathbf{snd}\ ((\mathbf{prefn}\ f)^n\ (\mathbf{true}, x)) \\
 & = & \mathbf{snd}\ (\mathbf{false}, f^{n-1}\ x) \\
 & = & f^{n-1}\ x
\end{array}
$$

Listid

Definitsioon

$$\begin{array}{lclcl}
\mathbf{nil} & \equiv & \lambda z.\ z & (\equiv & \mathbf{I}) \\
\mathbf{cons} & \equiv & \lambda x\ y.\ (\mathbf{false}, (x, y)) & & \\
\mathbf{null} & \equiv & \lambda z.\ z\ \mathbf{true} & (\equiv & \mathbf{fst}) \\
\mathbf{hd} & \equiv & \lambda z.\ \mathbf{fst}\ (\mathbf{snd}\ z)) & & \\
\mathbf{tl} & \equiv & \lambda z.\ \mathbf{snd}\ (\mathbf{snd}\ z)) & &
\end{array}$$

Näide

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{null}\ \mathbf{nil} & \equiv & \mathbf{fst}\ (\lambda z.\ z) \\
 & \equiv & (\lambda p.\ p\ \mathbf{true})\ (\lambda z.\ z) \\
 & \Longrightarrow & \mathbf{true}
\end{array}$$

Püsipunktid

Püsipunktiteoreem

$$\forall F.\ \exists X.\ X = F\,X$$

Mõisted

- Termi M nimetatakse püsipunkti kombinaatoriks kui

$$\forall F.\ M\,F = F\,(M\,F)$$

- Curry "paradoksaalne" kombinaator

$$\mathbf{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x.f(x\,x))\,(\lambda x.f(x\,x))$$

- "Tugev" püsipunkti kombinaator

$$\mathbf{\Theta} \equiv (\lambda xy.\ y(xxy))\,(\lambda xy.\ y(xxy))$$

Püsipunktid

Lemma

Olgu $G \equiv \lambda y f.f(yf) \quad (\equiv \mathbf{SI})$

$$M \text{ on püsipunkti kombinaator} \iff M = GM$$

Tõestus

$(\Leftarrow)$ Kui $M = GM$, siis:

$$\begin{array}{rcl} \forall F.\ M\,F & = & G\,M\,F \\ & \equiv & (\lambda y f.f(yf))\,M\,F \\ & = & F(M\,F) \end{array}$$

$(\Rightarrow)$ Kui M on püsipunkti kombinaator, siis:

$$\begin{array}{rcl} G\,M & = & \lambda f.f(M\,f) \\ & = & \lambda f.M\,f \\ & = & M \end{array}$$

Püsipunktid

Lemma

Kõik alljärgneva jada elemendid on püsipunkti kombinaatorid

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^0 &\equiv \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^{n+1} &\equiv \mathbf{Y}^n\, G \end{aligned}$$

Tõestus

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{n+1} &\equiv \mathbf{Y}^n\, G \\ &= G\,(\mathbf{Y}^n\, G) \\ &\equiv G\, \mathbf{Y}^{n+1} \end{aligned}$$

NB!

$$\mathbf{Y}^1 \Longrightarrow \mathbf{\Theta}$$

Rekursioon

Lemma

Olgu $C \equiv C(f, \vec{x})$, siis

- $\exists F.\ \forall \vec{N}.\ F\ \vec{N} = C(F, \vec{N})$
- $\exists F.\ \forall \vec{N}.\ F\ \vec{N} \Longrightarrow C(F, \vec{N})$

Tõestus

Võtame $F \equiv \boldsymbol{\Theta}(\lambda f \vec{x}.C(f, \vec{x}))$

Standardnumbrite liitmine

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{add} & = & \lambda x\ y.\ \mathbf{cond}\,(\mathbf{iszero}\ x)\ y\ (\mathbf{add}(\mathbf{pred}\ x)(\mathbf{succ}\ y)) \\
\mathbf{add} & \equiv & \mathbf{Y}\,(\lambda f\ x\ y.\ \mathbf{cond}\,(\mathbf{iszero}\ x)\ y\ (f\,(\mathbf{pred}\ x)(\mathbf{succ}\ y)))
\end{array}
$$

Mitmekohalised funktsioonid

"Currymine"

$$\begin{aligned}\mathbf{curry}_n &\equiv \lambda f\ x_1\ \ldots\ x_n.\ f\ (x_1, \ldots, x_n)\\ \mathbf{uncurry}_n &\equiv \lambda f\ p.\ f\ (p \overset{n}{\downarrow} 1)\ \ldots\ (p \overset{n}{\downarrow} n)\end{aligned}$$

NB!

$\mathbf{curry}_n(\mathbf{uncurry}_n\ N) = N \qquad \mathbf{uncurry}_n(\mathbf{curry}_n\ M) = M$

Üldistatud λ-abstraktsioon

$$\lambda(V_1, \ldots, V_n).\ E \ \equiv\ \mathbf{uncurry}_n\ (\lambda V_1\ \ldots\ V_n.\ E)$$

Üldistatud β-konversioon

$$(\lambda(V_1, \ldots, V_n).\ E)(E_1, \ldots, E_n) \ \longrightarrow_\beta\ E[E_1 \ldots E_n / V_1 \ldots V_n]$$

Rekursioon

Vastastikune rekursioon

$$
\begin{array}{lcl}
f_1 & = & F_1 \; f_1 \dots f_n \\
f_2 & = & F_2 \; f_1 \dots f_n \\
 & \dots & \\
f_n & = & F_n \; f_1 \dots f_n
\end{array}
$$

Definitsioon

$$
\begin{array}{lcl}
f & \equiv & \mathbf{Y}(\lambda(f_1, \dots, f_n).\ (F_1 f_1 \dots f_n,\ \dots,\ F_n f_1 \dots f_n)) \\
f_1 & \equiv & f \overset{n}{\downarrow} 1 \\
f_2 & \equiv & f \overset{n}{\downarrow} 2 \\
 & \dots & \\
f_n & \equiv & f \overset{n}{\downarrow} n
\end{array}
$$

Arvutatavus

Church'i tees

Kõik arvutatavad funktsioonid on esitatavad λ-arvutuses!

Lihtrekursiivsed funktsioonid

(i) 0

(ii) $S(x) = x + 1$

(iii) $U_n^i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$

(iv) $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_r(x_1, \ldots, x_n))$

(v)
$$\begin{aligned} f(0, x_2, \ldots, x_n) &= g(x_2, \ldots, x_n) \\ f(S(x_1), x_2, \ldots, x_n) &= h(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Osaliselt rekursiivsed funktsioonid

(vi) $f(x_1, \ldots, x_n) = \min \{ \, y \mid g(y, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \, \}$

Arvutatavus

Minimiseerimine

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{min}\, x\, f\,(x_1,\ldots,x_n) & = & \mathbf{cond}\,(\mathbf{eq}\,(f(x,x_2,\ldots,x_n)\,x_1) \\ & & \quad x \\ & & \quad (\mathbf{min}\,(\mathbf{succ}\,x)\,f\,(x_1,\ldots,x_n))) \end{array}$$

Definitsioon

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{min} & \equiv & \mathbf{Y}\ (\lambda m\, x\, f\,(x_1,\ldots,x_n). \\ & & \quad \mathbf{cond}\ (\mathbf{eq}\ (f(x,x_2,\ldots,x_n))\ x_1) \\ & & \qquad x \\ & & \qquad (m(\mathbf{succ}\ x)\ f\ (x_1,\ldots,x_n))) \end{array}$$