Struktuurne semantika

- Konfiguratsioonid on kujul $\langle S,\ s\rangle$ või s, kus S on lause ja s on olek
- Üleminekud on kujul $\langle S,\ s\rangle \ \Rightarrow\ \langle S',\ s'\rangle$ või $\langle S,\ s\rangle \ \Rightarrow\ s'$
- Konfiguratsioon on lõppkonfiguratsioon, kui ühtegi temast lähtuvat üleminekut ei leidu
- k-sammuline üleminek $\langle S,\ s\rangle \ \Rightarrow^k \gamma$
- Lõplikusammuline üleminek $\langle S,\ s\rangle \ \Rightarrow^* \gamma$

Keele While struktuurne semantika

- Tühilause

$$\langle \texttt{skip},\ s\rangle \ \Rightarrow\ s$$

- Omistamine

$$\langle x := a,\ s\rangle \ \Rightarrow\ s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$$

- Kompositsioon

$$\frac{\langle S_1,\ s\rangle \ \Rightarrow\ \langle S_1',\ s'\rangle}{\langle S_1; S_2,\ s\rangle \ \Rightarrow\ \langle S_1'; S_2,\ s'\rangle}$$

$$\frac{\langle S_1,\ s\rangle \ \Rightarrow\ s'}{\langle S_1; S_2,\ s\rangle \ \Rightarrow\ \langle S_2,\ s'\rangle}$$

Keele While struktuurne semantika

- Tingimuslause

$$\langle \texttt{if } b \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2,\ s\rangle \Rightarrow \langle S_1,\ s\rangle \qquad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \texttt{tt}$$

$$\langle \texttt{if } b \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2,\ s\rangle \Rightarrow \langle S_2,\ s\rangle \qquad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \texttt{ff}$$

- While-tsükkel

$$\langle \texttt{while } b \texttt{ do } S,\ s\rangle$$
$$\Rightarrow \langle \texttt{if } b \texttt{ then } (S;\ \texttt{while } b \texttt{ do } S) \texttt{ else skip},\ s\rangle$$

Keele While struktuurne semantika

- Näide:

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle y := 1;\ \texttt{while } \neg(x=1) \texttt{ do } (y := y \star x;\ x := x-1),\ [x \mapsto 3]\rangle \\
\Rightarrow & \langle \texttt{while } \neg(x=1) \texttt{ do } (y := y \star x;\ x := x-1),\ [x \mapsto 3, y \mapsto 1]\rangle \\
\Rightarrow & \langle \texttt{if } \neg(x=1) \texttt{ then } ((A_2;\ A_3);\ W) \texttt{ else skip},\ [x \mapsto 3, y \mapsto 1]\rangle \\
\Rightarrow & \langle y := y \star x;\ x := x-1;\ W,\ [x \mapsto 3, y \mapsto 1]\rangle \\
\Rightarrow & \langle x := x-1;\ W,\ [x \mapsto 3, y \mapsto 3]\rangle \\
\Rightarrow & \langle \texttt{while } \neg(x=1) \texttt{ do } (y := y \star x;\ x := x-1),\ [x \mapsto 2, y \mapsto 3]\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle \texttt{if } \neg(x=1) \texttt{ then } ((A_2;\ A_3);\ W) \texttt{ else skip},\ [x \mapsto 1, y \mapsto 6]\rangle \\
\Rightarrow & \langle \texttt{skip},\ [x \mapsto 1, y \mapsto 6]\rangle \\
\Rightarrow & [x \mapsto 1, y \mapsto 6]
\end{array}
$$

kus

$$
\begin{array}{lllllll}
A_2 & = & y := y \star x & \qquad & A_3 & = & x := x-1 \\
W & = & \texttt{while } \neg(x=1) \texttt{ do } (A_2;\ A_3) & & & &
\end{array}
$$

Semantika omadusi

- Laused S_1 ja S_2 on *semantiliselt samaväärsed* (ekvivalentsed) kui iga oleku s ja lõppkonfiguratsiooni γ korral

$$\langle S_1,\ s\rangle \ \Rightarrow^* \ \gamma \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle S_2,\ s\rangle \ \Rightarrow^* \ \gamma$$

- Semantika on *ühene* (determineeritud) kui suvaliste S, s, γ ja γ' korral

$$\langle S,\ s\rangle \ \Rightarrow \ \gamma \quad \wedge \quad \langle S,\ s\rangle \ \Rightarrow \ \gamma' \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma = \gamma'$$

- **Teoreem:** Keele While struktuurne semantika on ühene.

Semantika omadusi

- **Lemma:** Kui $\langle S_1; S_2,\ s\rangle \ \Rightarrow^k \ s''$ siis leiduvad s', k_1, k_2 sellised et $\langle S_1,\ s\rangle \ \Rightarrow^{k_1} \ s'$ ja $\langle S_2,\ s'\rangle \ \Rightarrow^{k_2} \ s''$, kus $k = k_1 + k_2$.
- **Tõestus:** Induktsiooniga derivatsioonijada $\langle S_1; S_2,\ s\rangle \ \Rightarrow^k \ s''$ pikkuse järgi.

  Induktsiooni baas triviaalne.

  Hüpotees, et $k \leq k_0$ jaoks kehtib. Näitame, et kehtib ka

$$\langle S_1; S_2,\ s\rangle \ \Rightarrow^{k_0+1} \ s''$$

  korral.

Semantika omadusi

- **Lemma:** Alljärgnev implikatsioon *ei kehti*!

$$\langle S_1; S_2,\ s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2,\ s'\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle S_1,\ s\rangle \Rightarrow^* s'$$

- **Lemma:** Alljärgnev implikatsioon *kehtib*!

$$\langle S_1,\ s\rangle \Rightarrow^k s' \quad \Longrightarrow \quad \langle S_1; S_2,\ s\rangle \Rightarrow^k \langle S_2,\ s'\rangle$$

Semantiline funktsioon $\mathcal{S}_{\text{sos}}$

- Struktuurne semantika indutseerib semantilise funktsiooni

$$\mathcal{S}_{\text{sos}} : \mathbf{Stm} \to (\mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State})$$

so. iga lause S jaoks defineerime (osalise) funktsiooni

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{sos}}[\![S]\!] &\in \mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State} \\ \mathcal{S}_{\text{sos}}[\![S]\!]s &= \begin{cases} s' & \text{if } \langle S,\ s\rangle \Rightarrow^* s' \\ \text{undef} & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

Loomuliku ja struktuurse semantika samaväärsus

- **Teoreem:** Iga keele While lause S korral $\mathcal{S}_{\mathrm{ns}}[\![S]\!] = \mathcal{S}_{\mathrm{sos}}[\![S]\!]$
- **Lemma:** Iga keele While lause S korral

$$\langle S,\ s\rangle \ \to\ s' \qquad \Longrightarrow \qquad \langle S,\ s\rangle \ \Rightarrow^{*}\ s'$$

- **Lemma:** Iga keele While lause S korral

$$\langle S,\ s\rangle \ \Rightarrow^{k} s' \qquad \Longrightarrow \qquad \langle S,\ s\rangle \ \to\ s'$$