Denotatsioonsemantika

Olemus

- Defineerib semantilise funktsiooni $\mathcal{S}_{\mathrm{ds}}$ otseselt.

- Semantilise funktsiooni definitsioon on kompositsiooniline.

Kompositsiooniline tähendab, et semantiline funktsioon defineeritakse homomorfismina teatavate algebrate vahel.

- Laused loetakse semantiliselt ekvivalentseteks, kui semantilise funktsiooni väärtused neil lausetel langevad kokku.

Spetsifikatsioon

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![x := a]\!] &= \mathcal{A}[\![x]\!] := \mathcal{A}[\![a]\!] \\
\mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![\mathbf{skip}]\!] &= \mathrm{skip} \\
\mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![S_1; S_2]\!] &= \mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![S_1]\!]; \mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![S_2]\!] \\
\mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![\mathbf{if}\, b\, \mathbf{then}\, S_1\, \mathbf{else}\, S_2]\!] &= \mathrm{cond}(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![S_2]\!]) \\
\mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![\mathbf{while}\, b\, \mathbf{do}\, S]\!] &= \mathrm{whiledo}(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![S]\!])
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{S}_{\mathrm{ds}} = \mathcal{S}_{\mathrm{ns}}$$

Teoreem

$\mathcal{S}_{\rm ns}[\![x := a]\!](s) = s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$

$\mathcal{S}_{\rm ns}[\![\mathbf{skip}]\!](s) = s$

$$\mathcal{S}_{\rm ns}[\![S_1; S_2]\!](s) = \begin{cases} \mathcal{S}_{\rm ns}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{\rm ns}[\![S_1]\!](s)), & \text{kui } \mathcal{S}_{\rm ns}[\![S_1]\!](s) \neq \bot, \\ \bot & \text{muidu} \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{\rm ns}[\![\mathbf{if}\, b\, \mathbf{then}\, S_1\, \mathbf{else}\, S_2]\!](s) = \begin{cases} \mathcal{S}_{\rm ns}[\![S_1]\!](s), & \text{kui } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt}, \\ \mathcal{S}_{\rm ns}[\![S_2]\!](s) & \text{muidu} \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{\rm ns}[\![\mathbf{while}\, b\, \mathbf{do}\, S]\!](s) = \begin{cases} (\mathcal{S}_{\rm ns}[\![S]\!])^n(s), & \text{kui } P_n(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{\rm ns}[\![S]\!], s), \\ \bot & \text{kui sellist } n \text{ ei leidu} \end{cases}$$

Siin $P_n(a, f, s)$ tähendab, et kehtivad kõik järgnevad tingimused:

(1) iga $i \leq n$ korral $f^i(s) \neq \bot$;

(2) iga $i < n$ korral $a(f^i(s)) = \mathbf{tt}$;

(3) $a(f^n(s)) = \mathbf{ff}$.

On selge, et selline n on ülimalt ühene.

Sellist n võib mitte leiduda kahel põhjusel:

- mingi $k \in \mathbb{N}$ korral $(\mathcal{S}_{\rm ns}[\![S]\!])^k(s) = \bot$, kuid iga $i < k$ korral $(\mathcal{S}_{\rm ns}[\![S]\!])^i(s) \neq \bot$ ja $\mathcal{B}[\![b]\!]((\mathcal{S}_{\rm ns}[\![S]\!])^i(s)) = \mathbf{tt}$;
- iga $i \in \mathbb{N}$ korral $(\mathcal{S}_{\rm ns}[\![S]\!])^i(s) \neq \bot$ ja $\mathcal{B}[\![b]\!]((\mathcal{S}_{\rm ns}[\![S]\!])^i(s)) = \mathbf{tt}$.

Tehete defineerimine

• Iga $a, b : \textbf{State} \to \mathbb{Z}$ korral anname $a := b : \textbf{State} \hookrightarrow \textbf{State}$ reegliga

$$(a := b)(s) = \begin{cases} s[x \mapsto b(s)], & \text{kui } x \text{ on ainus muutuja,} \\ & \text{mille korral } \forall t\ a(t) = t(x) \\ s, & \text{kui sellist } x \text{ ei saa üheselt määrata;} \end{cases}$$

• skip : **State** $\hookrightarrow$ **State** anname reegliga
skip = id;

• iga $f, g : \textbf{State} \hookrightarrow \textbf{State}$ korral anname $f; g : \textbf{State} \hookrightarrow \textbf{State}$ reegliga

$$(f; g)(s) = \begin{cases} g(f(s)), & \text{kui } f(s) \neq \bot, \\ \bot & \text{muidu;} \end{cases}$$

• iga $a : \textbf{State} \to \mathbb{T}$ ja $f, g : \textbf{State} \hookrightarrow \textbf{State}$ korral anname $\mathrm{cond}(a, f, g) : \textbf{State} \hookrightarrow \textbf{State}$ reegliga

$$\mathrm{cond}(a, f, g)(s) = \begin{cases} f(s), & \text{kui } a(s) = \mathbf{tt}, \\ g(s) & \text{muidu;} \end{cases}$$

• iga $a : \textbf{State} \to \mathbb{T}$ ja $f : \textbf{State} \hookrightarrow \textbf{State}$ korral anname $\mathrm{whiledo}(a, f) : \textbf{State} \hookrightarrow \textbf{State}$ reegliga

$$\mathrm{whiledo}(a, f) = \begin{cases} f^n(s), & \text{kui } P_n(a, f, s), \\ \bot, & \text{kui sellist } n \text{ ei leidu.} \end{cases}$$

Siis $\mathcal{S}_{\mathrm{ns}}$ rahuldab spetsifikatsioonis olevat tingimusterühma.

Algebralistel kaalutlustel rahuldab $\mathcal{S}_{\mathrm{ns}}$ ka viimast tingimust.

Järjestus osalistel funktsioonidel

Definitsioon. Iga $f, g : \mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State}$ korral loeme

$$f \sqsubseteq g \;\rightleftharpoons\; \forall s, t\,(f(s) = t \;\Rightarrow\; g(s) = t).$$

Lause. $\sqsubseteq$ on järjestus.

Tähistus. Iga $a : \mathbf{State} \to \mathbb{T}$ ja $f : \mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State}$ jaoks olgu funktsioon $F_{a,f} : (\mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State}) \to (\mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State})$ antud reegliga

$$F_{a,f}(g) = \mathrm{cond}(a, f; g, \mathrm{id}).$$

Teoreem. $\mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![\mathbf{while}\, b\, \mathbf{do}\, S]\!]$ on funktsiooni $F_{\mathcal{B}[\![b]\!],\mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![S]\!]}$ vähim püsipunkt.

Näited. Olgu g funktsiooni $F_{\mathcal{B}[\![b]\!],\mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![S]\!]}$ püsipunkt.

(1) Kui $\mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![\mathbf{while}\, b\, \mathbf{do}\, S]\!](s) = \bot$ esimesel põhjusel, siis $g(s) = \bot$.

(2) Kui $\mathcal{S}_{\mathrm{ds}}[\![\mathbf{while}\, b\, \mathbf{do}\, S]\!](s) = \bot$ teisel põhjusel, siis on võimalik ka $g(s) \neq \bot$. Näiteks sobib juht $b = (\neg x = 0)$, $S = \mathbf{skip}$.

Püsipunktiteooria

Definitsioon. Olgu $(D;\leq)$ järjestatud hulk. Olgu $Y \subseteq D$ ja $d \in D$.

(i) Kui iga $y \in Y$ korral $y \leq d$, siis öeldakse, et d on Y *ülemine tõke*.

(ii) Kui d on Y kõigi ülemiste tõkete alamhulga vähim element, siis öeldakse, et d on Y *ülemine raja*.

Selge, et Y ülemine raja on ülimalt ühene.

Definitsioon. Olgu $(D_1;\leq)$ ja $(D_2;\leq)$ järjestatud hulgad ning $f : D_1 \to D_2$. Kui iga $x, y \in D_1$ korral $x \leq y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y)$, siis öeldakse, et f on *monotoonne*. Monotoonse funktsiooni f korral kirjutame $f : (D_1;\leq) \to (D_2;\leq)$.

Lause. (i) Identsus on monotoonne; (ii) monotoonsete funktsioonide kompositsioon on monotoonne.

Definitsioon. Olgu $(D;\leq)$ järjestatud hulk.

(i) Olgu $C \subseteq D$. Kui iga $x, y \in C$ korral $x \leq y$ või $y \leq x$, siis ütleme, et C on *ahel*.

(ii) Kui igal ahelal $C \subseteq D$ leidub ülemine raja, siis ütleme, et $(D;\leq)$ on *täielik* järjestatud hulk. Ahela C ülemist raja tähistame $\bigvee C$.

Igas täielikus järjestatud hulgas leidub vähim element $\perp = \bigvee \varnothing$.

Lause. Ahela kujutis monotoonse funktsiooniga on ahel.

Lemma. Olgu $(D_1;\leq)$ ja $(D_2;\leq)$ täielikud järjestatud hulgad ja $f : (D_1;\leq) \to (D_2;\leq)$. Olgu $C \subseteq D_1$ ahel. Siis

$$\bigvee \{f(x) : x \in C\} \leq f\left(\bigvee C\right).$$

Definitsioon. Olgu $(D_1; \leq)$ ja $(D_2; \leq)$ täielikud järjestatud hulgad ja $f : D_1 \to D_2$.

(i) Kui f on monotoonne ja iga mittetühja ahela $C \subseteq D_1$ korral $\bigvee \{f(x) : x \in C\} = f\left(\bigvee C\right)$, siis öeldakse, et f on *pidev*.

(ii) Kui $f(\perp) = \perp$, siis öeldakse, et f on *agar*.

Lause. Olgu $(D_1; \leq)$ ja $(D_2; \leq)$ täielikud järjestatud hulgad. Funktsioon $f : D_1 \to D_2$ on pidev parajasti siis, kui iga ahela $C \subseteq D_1$ korral $f(\bigvee C)$ on hulga $\{f(x) : x \in C\}$ ülemiseks rajaks.

Lause. (i) Identsus on nii pidev kui agar; (ii) pidevate funktsioonide kompositsioon on pidev; (iii) agarate funktsioonide kompositsioon on agar.

Kleene püsipunktiteoreem. Olgu $(D; \leq)$ täielik järjestatud hulk ja $f : D \to D$ pidev funktsioon. Siis element

$$\operatorname{fix} f = \bigvee \left\{ f^i(\perp) : i \in \mathbb{N} \right\}$$

on funktsiooni f vähim püsipunkt.

Lause. Olgu $(D; \leq)$ täielik järjestatud hulk. Olgu $f : D \to D$ pidev funktsioon ja $x \in D$. Kui $f(x) \leq x$, siis $\operatorname{fix} f \leq x$.

Rakendus keelel While

Teoreem. Kõikjal määramata funktsioon $\perp$ on osaliste funktsioonide järjestatud hulga $(\mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State}; \sqsubseteq)$ vähim element.

Teoreem. Olgu C ahel järjestatud hulgas $(\mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State}; \sqsubseteq)$. Siis $g : \mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State}$, mis antakse reegliga

$$g(s) = \begin{cases} t, & \text{kui } \exists f \in C \ f(s) = t, \\ \perp & \text{muidu,} \end{cases}$$

on ahela C ülemine raja.

Seega $(\mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State}; \sqsubseteq)$ on täielik järjestatud hulk.

Lemma. (i) Kompositsioonioperaator ; on mõlema argumendi järgi pidev; (ii) operaator cond on teise ja kolmanda argumendi järgi pidev.

Teoreem. Iga $a : \mathbf{State} \to \mathbb{T}$ ja $f : \mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State}$ korral funktsioon $F_{a,f}$ on pidev.

Niisiis võime whiledo defineerida lihtsa reaga

$$\mathrm{whiledo}(a, f) = \mathrm{fix}\, F_{a,f}.$$