

Denotatsioonsemantika

Filosoofia

- Programmi denotatsioonsemantika on matemaatiline funktsioon, mis igale algolekule seab vastavusse mingi info.
 - Kui see info on sammsammuline vahetulemuste jada, kas see on siis denotatsioonsemantika või struktuurne operatsiooniline semantika?
- Keele denotatsioonsemantika on kompositsiooniline.
 - Kas ta on kompositsiooniline ka siis, kui ta on esitatud tuletussüsteemi abil, kust see välja ei paista?
St kas kompositsioonilisus on tema sisemine omadus või esituse omadus?

Definitsioon

Meie filosoofiaga ei tegele.

Keele denotatsioonsemantika on loomuliku semantika abstrakt-susastmega semantiline funktsioon, mis kujutab endast homomorfismi süntaktilisest algebrast semantilisse algebrasse. Süntaktilise algebra sorte nimetatakse süntaktilisteks kategooriateks, semantilise algebra sorte semantilisteks kategooriateks.

- St defineeritakse lihtsalt semantiline funktsioon otse.
- Homomorfismi tingimus tähendab kompositsioonilisust.

Spetsifi katsioon

Süntaks

Süntaktilised kategooriad

<i>Num</i>	naturaalarvkonstandid
<i>Var</i>	täisarvmuutujad
<i>Proc</i>	protseduurinimed
<i>AExp</i>	täisarvavaldised
<i>BExp</i>	tõeväärtusavaldised
<i>Stmt</i>	laused
<i>Decl</i>	protseduuride deklaratsioonid

Abstraktne süntaks: *Num, Var, Proc, AExp, BExp*

Num, Var, AExp, BExp — sama nagu varem.

Proc ei oma mingit struktuuri.

Abstraktne süntaks: *Stmt*

$$\begin{array}{l}
 Stmt \rightarrow Var := AExp \\
 \quad | \text{ if } BExp \text{ then } Stmt \text{ else } Stmt \\
 \quad | \text{ while } BExp \text{ do } Stmt \\
 \quad | \text{ call } Proc(AExp, \dots, AExp) \\
 \quad | Stmt ; Stmt \\
 \quad | \varepsilon
 \end{array}$$

$$\forall S \in Stmt (S ; \varepsilon = S = \varepsilon ; S)$$

Abstraktne süntaks: *Decl*
$$\begin{array}{l} Decl \rightarrow \mathbf{proc} \text{ } Proc(Var, \dots, Var) \mathbf{is} \text{ } Stmt \\ \quad | \text{ } Decl ; Decl \\ \quad | \text{ } \varepsilon \end{array}$$
$$\forall D \in Decl (D ; \varepsilon = D = \varepsilon ; D)$$

Abstraktne süntaks, algebraliselt

Süntaktilised konstruktsioonid kujutavad endast algebralisi operatsioone süntaktilisel algebral.

_ := _	$\in Var \times AExp$	$\rightarrow Stmt$
if _ then _ else _	$\in BExp \times Stmt \times Stmt$	$\rightarrow Stmt$
while _ do _	$\in BExp \times Stmt$	$\rightarrow Stmt$
call _	$\in Proc \times AExp^*$	$\rightarrow Stmt$
_ ; _	$\in Stmt \times Stmt$	$\rightarrow Stmt$
ε	$\in 1$	$\rightarrow Stmt$
proc _ is _	$\in Proc \times Var^* \times Stmt$	$\rightarrow Decl$
_ ; _	$\in Decl \times Decl$	$\rightarrow Decl$
ε	$\in 1$	$\rightarrow Decl$

Tehted, millega moodustatakse avaldisi, on siit puudu, need saab sarnaselt spetsifitseerida.

Semantika

Abitüübid

$\text{State} = \text{Var} \rightarrow 1 + \mathbb{Z}$

muutujate väärtustus

$\text{Act} = \text{State} \rightarrow 1 + \text{State}$

efekt

$\text{Env} = \text{Proc} \rightarrow 1 + (\mathbb{Z}^* \rightarrow \text{Act})$

protseduuride keskkond

Semantiline algebra: sordid $\text{Num} = \mathbb{N}$ $\text{AExp} = \text{State} \rightarrow 1 + \mathbb{Z}$ $\text{BExp} = \text{State} \rightarrow 1 + \mathbb{T}$ Var Proc Stmt Decl

Semantilised kategooriad Num, AExp, BExp on varasemast juba tuttavad.

- Arvkonstantide, arvavaldiste ja tõeväärtusavaldiste semantika oli ka varem esitatud denotatiivselt.
- Erinevus on, et nüüd saab avaldise väärtus ka puududa, kuna muutuja võib olekus olla väärtustamata.

Semantiline algebra: tehted

$\text{assign} \in \text{Var} \times \text{AExp}$	$\rightarrow \text{Stmt}$
$\text{cond} \in \text{BExp} \times \text{Stmt} \times \text{Stmt}$	$\rightarrow \text{Stmt}$
$\text{while} \in \text{BExp} \times \text{Stmt}$	$\rightarrow \text{Stmt}$
$\text{call} \in \text{Proc} \times \text{AExp}^*$	$\rightarrow \text{Stmt}$
$(;) \in \text{Stmt} \times \text{Stmt}$	$\rightarrow \text{Stmt}$
$\text{empty} \in 1$	$\rightarrow \text{Stmt}$
$\text{proc} \in \text{Proc} \times \text{Var}^* \times \text{Stmt}$	$\rightarrow \text{Decl}$
$(;) \in \text{Decl} \times \text{Decl}$	$\rightarrow \text{Decl}$
$\text{empty} \in 1$	$\rightarrow \text{Decl}$

Siia kuuluvad ka tehted, millega väärtustatakse avaldisi, kuid need on juba varasemast tuttavad.

Semantika

$\mathcal{N} \in \text{Num} \rightarrow \text{Num}$	
$\mathcal{A} \in \text{AExp} \rightarrow \text{AExp}$	
$\mathcal{B} \in \text{BExp} \rightarrow \text{BExp}$	
$\mathcal{V} \in \text{Var} \rightarrow \text{Var}$	
$\mathcal{P} \in \text{Proc} \rightarrow \text{Proc}$	
$\mathcal{S} \in \text{Stmt} \rightarrow \text{Stmt}$	
$\mathcal{C} \in \text{Decl} \rightarrow \text{Decl}$	lühike keskkonnamuutus
$\mathcal{D} \in \text{Decl} \rightarrow \text{Decl}$	pikk keskkonnamuutus

Homomorfism

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(X &:= E) &&= \text{assign}(\mathcal{V}(X), \mathcal{A}(E)) \\
\mathcal{S}(\text{if } E &\text{ then } T_1 \text{ else } T_2) &&= \text{cond}(\mathcal{B}(E), \mathcal{S}(T_1), \mathcal{S}(T_2)) \\
\mathcal{S}(\text{while } E &\text{ do } T) &&= \text{while}(\mathcal{B}(E), \mathcal{S}(T)) \\
\mathcal{S}(\text{call } P(E_1, &\dots, E_n)) &&= \text{call}(\mathcal{P}(P), (\mathcal{A}(E_1), \dots, \mathcal{A}(E_n))) \\
\mathcal{S}(T_1 ; T_2) &&= \mathcal{S}(T_1) ; \mathcal{S}(T_2) \\
\mathcal{S}(\varepsilon) &&= \text{empty} \\
\mathcal{C}(\text{proc } P(X_1, &\dots, X_n) \text{ is } S) \\
&&= \text{proc}(\mathcal{P}(P), (\mathcal{V}(X_1), \dots, \mathcal{V}(X_n)), \mathcal{S}(S)) \\
\mathcal{C}(C_1 ; C_2) &= \mathcal{C}(C_1) ; \mathcal{C}(C_2) \\
\mathcal{C}(\varepsilon) &= \text{empty}
\end{aligned}$$

Nimede duaalne loomus

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{V}} &\in \text{Var} \rightarrow \text{State} \rightarrow 1 + \mathbb{Z} && \text{muutuja R-väärtus} \\
\overleftarrow{\mathcal{V}} &\in \text{Var} \rightarrow 1 + \mathbb{Z} \rightarrow \text{State} && \text{muutuja L-väärtus} \\
\vec{\mathcal{P}} &\in \text{Proc} \rightarrow \text{Env} \rightarrow 1 + (\mathbb{Z}^* \rightarrow \text{Act}) && \text{protseduurinime R-väärtus} \\
\overleftarrow{\mathcal{P}} &\in \text{Proc} \rightarrow 1 + (\mathbb{Z}^* \rightarrow \text{Act}) \rightarrow \text{Env} && \text{protseduurinime L-väärtus}
\end{aligned}$$

Sortide definitsioonid
$$\text{Var} = (1 + \mathbb{Z} \rightarrow \text{State}) \times (\text{State} \rightarrow 1 + \mathbb{Z})$$
$$\text{Proc} = (1 + (\mathbb{Z}^* \rightarrow \text{Act}) \rightarrow \text{Env}) \times (\text{Env} \rightarrow 1 + (\mathbb{Z}^* \rightarrow \text{Act}))$$
$$\text{Stmt} = \text{Env} \rightarrow \text{Act}$$
$$\text{Decl} = \text{Env} \rightarrow \text{Env}$$
Arvkonstantide semantika

Arvkonstantide semantika on sama mis varem.

Muutujate semantika

- R-väärtus:

$$\vec{\mathcal{V}}(X) = \lambda s. s(X).$$

- L-väärtus:

$$\overleftarrow{\mathcal{V}}(X) = \lambda v. (X \mapsto v),$$

kus

$$(X \mapsto v) = \lambda Z. \left\{ \begin{array}{ll} v & \text{kui } Z = X \\ \perp & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}.$$

Koguväärtuses sisalduvad mõlemad:

$$\mathcal{V}(X) = (\overleftarrow{\mathcal{V}}(X), \vec{\mathcal{V}}(X)).$$

Protseduurinimede semantika

- R-väärtus:

$$\vec{\mathcal{P}}(P) = \lambda e. e(P).$$

- L-väärtus:

$$\overleftarrow{\mathcal{P}}(P) = \lambda v. (P \mapsto v).$$

Koguväärtuses sisalduvad mõlemad:

$$\mathcal{P}(P) = (\overleftarrow{\mathcal{P}}(P), \vec{\mathcal{P}}(P)).$$

Avaldiste semantika

Muutujate korral

$$\mathcal{A}(X) = \vec{\mathcal{V}}(X).$$

Ülejäänud aritmeetiliste ja tõeväärtusavaldiste semantika avaldub samuti kui varem.

- Olekus määramata väärtusega muutujaid sisaldavate avaldiste väärtuseks selles olekus on $\perp$.

Lausete semantika

Püüame semantilise funktsiooni defineerida nii, et vastaks loomulikule semantikale:

$$\forall S \in Stmt \forall e \in Env \forall s \in (Var \rightarrow \mathbb{Z}) (\mathcal{S}(S)(e)(s) = \mathcal{S}_{ns}(S)(s))$$

Erinevuseks on võimalike täitmisaegsete vigade arvestamine.

Defineerime abifunktsiooni järgmiselt:

$$\begin{aligned} \text{wrap} &\in (1 + \mathbb{Z})^* \rightarrow \text{State} \rightarrow 1 + \text{State}, \\ \text{wrap} &= \lambda(v_1, \dots, v_n). \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} s & \text{kui } \forall i (v_i \neq \perp) \\ \perp & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Lausete semantika: omistamine, esmane vaatlus

Loomuliku semantika reegel:

$$\overline{\langle X := E \mid s \rangle \rightarrow s[X \mapsto \mathcal{A}(E)(s)]}$$

Vastav üleminekufunktsioon:

$$\mathcal{S}(X := E)(e)(s) = s[X \mapsto \mathcal{A}(E)(s)]$$

Lausete semantika: omistamine, definitsioon

Defineerime

$$\text{assign}((\ell, r), e) = \lambda e. \lambda s. \text{wrap}(e(s))(s[\ell(e(s))]),$$

kus

$$f[g](x) = \left\{ \begin{array}{ll} g(x) & \text{kui } g(x) \neq \perp \\ f(x) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}.$$

Lausete semantika: omistamine, korrektsus

Kui $\mathcal{A}(E)(s) \neq \perp$, siis

$$\begin{aligned} & \text{assign}(\mathcal{V}(X), \mathcal{A}(E))(e)(s) \\ &= \text{assign}((\overleftarrow{\mathcal{V}}(X), \overrightarrow{\mathcal{V}}(X)), \mathcal{A}(E))(e)(s) \\ &= \text{wrap}(\mathcal{A}(E)(s))(s[\overleftarrow{\mathcal{V}}(X)(\mathcal{A}(E)(s))]) \\ &= s[\overleftarrow{\mathcal{V}}(X)(\mathcal{A}(E)(s))] \\ &= s[(\lambda v. (X \mapsto v))(\mathcal{A}(E)(s))] \\ &= s[X \mapsto \mathcal{A}(E)(s)] \\ &= \mathcal{S}(X := E)(e)(s). \end{aligned}$$

Lausete semantika: tingimuslause, esmane vaatlus

Loomuliku semantika reeglid:

$$\frac{\langle T_1 \mid s \rangle \rightarrow s', \quad \mathcal{B}(E)(s) = \mathbb{tt}}{\langle \mathbf{if} \ E \ \mathbf{then} \ T_1 \ \mathbf{else} \ T_2 \mid s \rangle \rightarrow s'}$$

$$\frac{\langle T_2 \mid s \rangle \rightarrow s', \quad \mathcal{B}(E)(s) = \mathbb{ff}}{\langle \mathbf{if} \ E \ \mathbf{then} \ T_1 \ \mathbf{else} \ T_2 \mid s \rangle \rightarrow s'}$$

Vastav üleminekufunktsioon:

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}(\mathbf{if} \ E \ \mathbf{then} \ T_1 \ \mathbf{else} \ T_2)(e)(s) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{S}(T_1)(e)(s) & \text{kui } \mathcal{B}(E)(s) = \mathbb{tt} \\ \mathcal{S}(T_2)(e)(s) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Lausete semantika: tingimuslause, definitsioon

Defineerime

$$\begin{aligned} & \text{cond}(e, t_1, t_2) \\ &= \lambda e. \lambda s. \text{wrap}(e(s)) \left\{ \begin{array}{ll} t_1(e)(s) & \text{kui } e(s) = \mathbb{tt} \\ t_2(e)(s) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Lausete semantika: tingimuslause, korrektsus

Kui $\mathcal{B}(E)(s) \neq \perp$, siis

$$\begin{aligned}
 & \text{cond}(\mathcal{B}(E), \mathcal{S}(T_1), \mathcal{S}(T_2))(e)(s) \\
 &= \text{wrap}(\mathcal{B}(E)(s)) \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{S}(T_1)(e)(s) & \text{kui } \mathcal{B}(E)(s) = \mathbb{tt} \\ \mathcal{S}(T_2)(e)(s) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{S}(T_1)(e)(s) & \text{kui } \mathcal{B}(E)(s) = \mathbb{tt} \\ \mathcal{S}(T_2)(e)(s) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\
 &= \mathcal{S}(\mathbf{if } E \mathbf{ then } T_1 \mathbf{ else } T_2)(e)(s).
 \end{aligned}$$

Lausete semantika: tsükel, abitähistused

- Iga $f, g \in \text{State} \rightarrow 1 + \text{State}$ korral olgu

$$\begin{aligned}
 & f ; g \in \text{State} \rightarrow 1 + \text{State}, \\
 & f ; g = \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} g(f(s)) & \text{kui } f(s) \neq \perp \\ \perp & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

- Iga $f \in \text{State} \rightarrow 1 + \text{State}$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral olgu

$$f^n = \underbrace{f ; \dots ; f}_n \in \text{State} \rightarrow 1 + \text{State}.$$

Lausete semantika: tsükkel, esmane vaatlus

Loomuliku semantika reeglid:

$$\frac{\langle T \mid s \rangle \rightarrow s', \quad \langle \mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T \mid s' \rangle \rightarrow s'', \quad \mathcal{B}(E)(s) = \mathbb{tt}}{\langle \mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T \mid s \rangle \rightarrow s''}$$

$$\frac{\mathcal{B}(E)(s) = \mathbb{ff}}{\langle \mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T \mid s \rangle \rightarrow s}$$

Vastav üleminekufunktsioon:

$$\mathcal{S}(\mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T)(e)(s) = \begin{cases} (\mathcal{S}(T)(e) ; \mathcal{S}(\mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T)(e))(s) & \text{kui } \mathcal{B}(E)(s) = \mathbb{tt} \\ s & \text{ülejäänud juhtudel} \end{cases}$$

See pole korrektne definitsioon...

Lausete semantika: tsükel, otsene variant

Vaatlusest nähtub, et

$$\mathcal{S}(\mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T)(e)(s) = \left\{ \begin{array}{ll} (\mathcal{S}(T)(e))^n(s) & \text{kui: } \forall i \leq n \ ((\mathcal{S}(T)(e))^i(s) \neq \perp), \\ & \forall i < n \ (\mathcal{B}(E)((\mathcal{S}(T)(e))^i(s)) = \mathbf{tt}), \\ & \mathcal{B}(E)((\mathcal{S}(T)(e))^n(s)) = \mathbf{ff} \\ \perp, & \text{kui sellist } n \text{ ei leidu} \end{array} \right\}$$

Definitsioon selle järgi:

$$\begin{aligned} & \text{while}(e, t) \\ &= \lambda e. \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} (t(e))^n(s) & \text{kui: } \forall i \leq n \ ((t(e))^i(s) \neq \perp), \\ & \forall i < n \ (e((t(e))^i(s)) = \mathbf{tt}), \\ & e((t(e))^n(s)) = \mathbf{ff} \\ \perp, & \text{kui sellist } n \text{ ei leidu} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Lausete semantika: tsükkel, otsene variant, korrektsus

Olgu $\mathcal{S}(\mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T)(e)(s) \neq \perp$.

Siis $\mathcal{S}(\mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T)(e)(s) = (\mathcal{S}(T)(e))^n(s)$ mingi $n \in \mathbb{N}$ korral, kusjuures

$$\begin{aligned} & \forall i \leq n \ ((\mathcal{S}(T)(e))^i(s) \neq \perp) \\ & \wedge \forall i < n \ (\mathcal{B}(E)((\mathcal{S}(T)(e))^i(s)) = \mathbf{tt}) \\ & \wedge \mathcal{B}(E)((\mathcal{S}(T)(e))^n(s)) = \mathbf{ff}. \end{aligned}$$

Tõestame induktsiooniga n järgi, et loomulikus semantikas $\langle \mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T \mid s \rangle \rightarrow (\mathcal{S}(T)(e))^n(s)$.

Kui $n = 0$, siis saame $\mathcal{B}(E)(s) = \mathbf{ff}$, seega loomulikus semantikas $\langle \mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T \mid s \rangle \rightarrow s = (\mathcal{S}(T)(e))^0(s)$.

Olgu $n > 0$ ja kehtigu tõestatav väide väiksemate arvude jaoks.

Tähistame $t = \mathcal{S}(T)(e)(s) \neq \perp$. Siis

$$\begin{aligned} & \forall i \leq n - 1 \ ((\mathcal{S}(T)(e))^i(t) \neq \perp) \\ & \wedge \forall i < n - 1 \ (\mathcal{B}(E)((\mathcal{S}(T)(e))^i(t)) = \mathbf{tt}) \\ & \wedge \mathcal{B}(E)((\mathcal{S}(T)(e))^{n-1}(t)) = \mathbf{ff}. \end{aligned}$$

Induktsiooni eeldusest loomulikus semantikas

$$\langle \mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T \mid t \rangle \rightarrow (\mathcal{S}(T)(e))^{n-1}(t) = (\mathcal{S}(T)(e))^n(s).$$

Algest tingimusest saame $\mathcal{B}(E)(s) = \mathbf{tt}$, mistõttu saame tuletada

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \langle T \mid s \rangle \rightarrow t, \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \langle \mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T \mid t \rangle \rightarrow (\mathcal{S}(T)(e))^n(s) \end{array}}{\langle \mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T \mid s \rangle \rightarrow (\mathcal{S}(T)(e))^n(s)}.$$

Lausete semantika: tsükkel, otsene variant, korrektsus

Olgu loomulikus semantikas $\langle \mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T \mid s \rangle \rightarrow s'$.

Loeme puu tüvekõrguseks lause $\mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T$ kordumiste arvu selles; olgu tüvekõrgus $n + 1$ (vähemalt korra see lause esineb).

Näitame induktsiooniga n järgi, et $\mathcal{S}(\mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T)(e)(s)$ määratuseks vajalik tingimus kehtib n jaoks ning $s' = (\mathcal{S}(T)(e))^n(s)$.

Kui $n = 0$, siis $\mathcal{B}(E)(s) = \text{ff}$ ja $s' = s$. Seega vajalik tingimus kehtib 0 jaoks ja $s' = (\mathcal{S}(T)(e))^0(s)$.

Olgu $n > 0$ ja kehtigu väide väiksemate arvude korral. Siis loomulikus semantikas on olemas tuletus

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \langle T \mid s \rangle \rightarrow t, \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \langle \mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T \mid t \rangle \rightarrow s', \end{array} \quad \mathcal{B}(E)(s) = \text{tt}}{\langle \mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T \mid s \rangle \rightarrow s'}$$

Ülemine parempoolne tuletuspuu on tüvekõrgusega n , seega induktsiooni eeldusest kehtib

$$\begin{aligned} & \forall i \leq n - 1 ((\mathcal{S}(T)(e))^i(t) \neq \perp) \\ & \wedge \forall i < n - 1 (\mathcal{B}(E)((\mathcal{S}(T)(e))^i(t)) = \text{tt}) \\ & \wedge \mathcal{B}(E)((\mathcal{S}(T)(e))^{n-1}(t)) = \text{ff} \end{aligned}$$

ning $s' = (\mathcal{S}(T)(e))^{n-1}(t) = (\mathcal{S}(T)(e))^n(s)$.

Konjunktsioon teisendub kujule

$$\begin{aligned} & \forall i \leq n (i > 0 \implies (\mathcal{S}(T)(e))^i(s) \neq \perp) \\ & \wedge \forall i < n (i > 0 \implies \mathcal{B}(E)((\mathcal{S}(T)(e))^i(s)) = \text{tt}) \\ & \wedge \mathcal{B}(E)((\mathcal{S}(T)(e))^n(s)) = \text{ff}. \end{aligned}$$

Lisaks muidugi $(\mathcal{S}(T)(e))^0(s) = s \neq \perp$ ja $\mathcal{B}(E)((\mathcal{S}(T)(e))^0(s)) = \mathcal{B}(E)(s) = \text{tt}$, seega vajalik tingimus kehtib.

Seega iga tüvekõrguse $n + 1$ korral

$$\mathcal{S}(\mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T)(e)(s) = (\mathcal{S}(T)(e))^n(s).$$

Lausete semantika: tsükkel, variant püsipunktiga

Kui nii saaks, oleks see ülevaatlükum:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T)(e) \\ = \text{fix}(\lambda g. \lambda s. \\ \text{wrap}(\mathcal{B}(E)(s)) \left\{ \begin{array}{ll} (\mathcal{S}(T)(e) ; g)(s) & \text{kui } \mathcal{B}(E)(s) = \mathbb{tt} \\ & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}) \end{aligned}$$

Definitsioon selle järgi:

$$\begin{aligned} \text{while}(e, t) \\ = \lambda e. \\ \text{fix}(\lambda g. \lambda s. \text{wrap}(e(s)) \left\{ \begin{array}{ll} (t(e) ; g)(s) & \text{kui } e(s) = \mathbb{tt} \\ & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}) \end{aligned}$$

Lausete semantika: tsükel, variant püsipunktiga

Põhjendus: kui $\mathcal{B}(E)(s) \neq \perp$, siis

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{S}(\mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T)(e)(s) \\
 &= \text{wrap}(\mathcal{B}(E)(s)) \\
 & \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\mathcal{S}(T)(e) ; \mathcal{S}(\mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T)(e))(s) & \text{kui } \mathcal{B}(E)(s) = \mathbb{tt} \\ s & \text{ülejäanud juhtudel} \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{ll} (\mathcal{S}(T)(e) ; \mathcal{S}(\mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T)(e))(s) & \text{kui } \mathcal{B}(E)(s) = \mathbb{tt} \\ s & \text{ülejäanud juhtudel} \end{array} \right\} \\
 &= (\lambda g. \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} (\mathcal{S}(T)(e) ; g)(s) & \text{kui } \mathcal{B}(E)(s) = \mathbb{tt} \\ s & \text{ülejäanud juhtudel} \end{array} \right\}) \\
 & \quad (\mathcal{S}(\mathbf{while} \ E \ \mathbf{do} \ T)(e)) \\
 & \quad (s) \\
 &= \text{fix}(\lambda g. \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} (\mathcal{S}(T)(e) ; g)(s) & \text{kui } \mathcal{B}(E)(s) = \mathbb{tt} \\ s & \text{ülejäanud juhtudel} \end{array} \right\})(s)
 \end{aligned}$$

Lausete semantika: protseduurikutse, esmane vaatlus definitsiooniga

Soov:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{call} \ P(E_1, \dots, E_n))(e)(s) \\ = e(P)(\mathcal{A}(E_1)(s), \dots, \mathcal{A}(E_n)(s))(s). \end{aligned}$$

Defineerime

$$\begin{aligned} \text{call}((p, q), (e_1, \dots, e_n)) \\ = \lambda e. \lambda s. \text{wrap}(e_1(s), \dots, e_n(s))(q(e)(e_1(s), \dots, e_n(s))(s)). \end{aligned}$$

Lausete semantika: protseduurikutse, korrektsus

Kui $\forall i \ (\mathcal{A}(E_i)(s) \neq \perp)$, siis

$$\begin{aligned} \text{call}(\mathcal{P}(P), (\mathcal{A}(E_1), \dots, \mathcal{A}(E_n)))(e)(s) \\ = \text{call}((\overleftarrow{\mathcal{P}}(P), \overrightarrow{\mathcal{P}}(P)), (\mathcal{A}(E_1), \dots, \mathcal{A}(E_n)))(e)(s) \\ = \text{wrap}(\dots)(\overrightarrow{\mathcal{P}}(P)(e)(\mathcal{A}(E_1)(s), \dots, \mathcal{A}(E_n)(s))(s)) \\ = \overrightarrow{\mathcal{P}}(P)(e)(\mathcal{A}(E_1)(s), \dots, \mathcal{A}(E_n)(s))(s) \\ = (\lambda e. e(P))(e)(\mathcal{A}(E_1)(s), \dots, \mathcal{A}(E_n)(s))(s) \\ = e(P)(\mathcal{A}(E_1)(s), \dots, \mathcal{A}(E_n)(s))(s) \\ = \mathcal{S}(\mathbf{call} \ P(E_1, \dots, E_n))(e)(s). \end{aligned}$$

Lausete semantika: kompositsioon

Loomuliku semantika reegel:

$$\frac{\langle T_1 \mid s \rangle \rightarrow s', \quad \langle T_2 \mid s' \rangle \rightarrow s''}{\langle T_1 ; T_2 \mid s \rangle \rightarrow s''}$$

Vastav üleminekufunktsioon:

$$\mathcal{S}(T_1 ; T_2)(e) = \mathcal{S}(T_1)(e) ; \mathcal{S}(T_2)(e).$$

Defineerime

$$t_1 ; t_2 = \lambda e. t_1(e) ; t_2(e)$$

Lausete semantika: ühik

Loomuliku semantika reegel:

$$\overline{\overline{\langle \varepsilon \mid s \rangle \rightarrow s}}$$

Vastav üleminekufunktsioon:

$$\mathcal{S}(\varepsilon)(e)(s) = s.$$

Defineerime

$$\text{empty}() = \lambda e. \lambda s. s.$$

Deklaratsioonide ühekordse läbimise semantika: üksikprotseduur

Soov:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mathbf{proc} \ P(X_1, \dots, X_n) \ \mathbf{is} \ S)(e) \\ = e[P \mapsto \lambda(v_1, \dots, v_n). \lambda s. \\ \mathcal{S}(S)(e)(s[\bigcup_{i=1}^n (X_i \mapsto v_i)])[\bigcup_{i=1}^n (X_i \mapsto s(X_i))]]. \end{aligned}$$

Defineerime

$$\begin{aligned} \mathbf{proc}((p, q), ((\ell_1, r_1), \dots, (\ell_n, r_n)), t) \\ = \lambda e. e[p(\lambda(v_1, \dots, v_n). \lambda s. t(e)(s[\bigcup_{i=1}^n \ell_i(v_i)])[\bigcup_{i=1}^n \ell_i(r_i(s))]))]. \end{aligned}$$

Deklaratsioonide ühekordse läbimise semantika: protseduur

Korrektus:

$$\begin{aligned}
& \text{proc}(\mathcal{P}(P), (\mathcal{V}(X_1), \dots, \mathcal{V}(X_n)), \mathcal{S}(S)) \\
&= \text{proc}(\\
&\quad (\overleftarrow{\mathcal{P}}(P), \overrightarrow{\mathcal{P}}(P)), \\
&\quad ((\overleftarrow{\mathcal{V}}(X_1), \overrightarrow{\mathcal{V}}(X_1)), \dots, (\overleftarrow{\mathcal{V}}(X_n), \overrightarrow{\mathcal{V}}(X_n))), \\
&\quad \mathcal{S}(S)) \\
&= \lambda e. e[\overleftarrow{\mathcal{P}}(P)(\lambda(v_1, \dots, v_n). \lambda s. \\
&\quad \mathcal{S}(S)(e)(s[\bigcup_{i=1}^n \overleftarrow{\mathcal{V}}(X_i)(v_i)][\bigcup_{i=1}^n \overleftarrow{\mathcal{V}}(X_i)(\overrightarrow{\mathcal{V}}(X_i)(s))])] \\
&= \lambda e. e[(\lambda v. (P \mapsto v))(\lambda(v_1, \dots, v_n). \lambda s. \\
&\quad \mathcal{S}(S)(e)(s[\bigcup_{i=1}^n (\lambda v. (X_i \mapsto v))(v_i)] \\
&\quad [\bigcup_{i=1}^n (\lambda v. (X_i \mapsto v))((\lambda s. s(X_i))(s))])] \\
&= \lambda e. e[P \mapsto \lambda(v_1, \dots, v_n). \lambda s. \\
&\quad \mathcal{S}(S)(e)(s[\bigcup_{i=1}^n (X_i \mapsto v_i)][\bigcup_{i=1}^n (X_i \mapsto s(X_i))])] \\
&= \mathcal{S}(\mathbf{proc} \ P(X_1, \dots, X_n) \ \mathbf{is} \ S)
\end{aligned}$$

Deklaratsioonide ühekordse läbimise semantika: muud

$$\mathcal{C}(C_1 ; C_2) = \mathcal{C}(C_1) ; \mathcal{C}(C_2)$$

$$\mathcal{C}(\varepsilon) = \text{id}$$

Deklaratsioonide iteratiivsemantika

$$\mathcal{D}(D)(e) = \mathcal{C}(D)(\mathcal{D}(D)(e))$$

Oleks hea, kui tohiks kirjutada

$$\mathcal{D}(D) = \text{fix}(\lambda g. g ; \mathcal{C}(D)).$$

Põhjendus:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(D) &= \lambda e. \mathcal{C}(D)(\mathcal{D}(D)(e)) \\ &= \mathcal{D}(D) ; \mathcal{C}(D) \\ &= (\lambda g. g ; \mathcal{C}(D))(\mathcal{D}(D)) \\ &= \text{fix}(\lambda g. g ; \mathcal{C}(D)) \end{aligned}$$

Püsipunktiteooria

Põhimõisted ja lemmad

Ülemtõke, ülemraja

Olgu $(D; \leq)$ järjestatud hulk.

Olgu $Y \subseteq D$ ja $z \in D$.

- Kui iga $y \in Y$ korral $y \leq z$, siis öeldakse, et z on Y ülemtõke.
- Kui z on Y kõigi ülemtõkete hulga vähim element, siis öeldakse, et z on Y ülemraja.

Ülemraja ühesus

Olgu $(D; \leq)$ järjestatud hulk.

Olgu $Y \subseteq D$.

- Y ülemraja on ülimalt ühene.

Tõestus.

Ta on teatava järjestatud hulga vähim element.

Ülemraja kriteerium

Olgu $(D; \leq)$ järjestatud hulk.

Olgu $Y \subseteq D$ ja $z \in D$.

- z on Y ülemraja parajasti siis, kui

$$\forall d \in D (z \leq d \iff \forall y \in Y (y \leq d)).$$

Tõestus.

$$\begin{aligned} & \forall d \in D (z \leq d \iff \forall y \in Y (y \leq d)) \\ & \iff \forall d \in D \\ & \quad ((z \leq d \implies \forall y \in Y (y \leq d)) \\ & \quad \wedge (\forall y \in Y (y \leq d) \implies z \leq d)) \\ & \iff \forall d \in D (z \leq d \implies \forall y \in Y (y \leq d)) \\ & \quad \wedge \forall d \in D (\forall y \in Y (y \leq d) \implies z \leq d) \end{aligned}$$

- Konjunktsiooni vasak argument:

$$\begin{aligned} & \forall d \in D (z \leq d \implies \forall y \in Y (y \leq d)) \\ & \iff \forall y \in Y (y \leq z) \\ & \iff z \text{ on } Y \text{ ülemtõke} \end{aligned}$$

- Konjunktsiooni parem argument:

$$\begin{aligned} & \forall d \in D (\forall y \in Y (y \leq d) \implies z \leq d) \\ & \iff z \text{ on seoses } \leq \text{ hulga } Y \text{ iga ülemtõkkega} \end{aligned}$$

Suurim element ja ülemraja

Olgu $(D; \leq)$ järjestatud hulk.

Olgu $Y \subseteq D$.

Olgu $z \in Y$ hulga Y suurim element.

- Siis z on Y ülemraja.

Tõestus.

– Olgu $d \in D$.

* Ühelt poolt

$$\begin{aligned} z \leq d & \\ \implies \forall y \in Y (y \leq z) \wedge z \leq d & \\ \implies \forall y \in Y (y \leq z \wedge z \leq d) & \\ \implies \forall y \in Y (y \leq d). & \end{aligned}$$

* Teiselt poolt

$$\forall y \in Y (y \leq d) \implies z \leq d.$$

$$\text{Kokkuvõttes } z \leq d \iff \forall y \in Y (y \leq d).$$

Ülemraja kriteeriumi põhjal z on Y ülemraja.

Monotoonsus

Olgu $(D_1; \leq)$ ja $(D_2; \preceq)$ järjestatud hulgad.

Olgu $f : D_1 \rightarrow D_2$.

- Kui iga $x, y \in D_1$ korral $x \leq y \implies f(x) \preceq f(y)$, siis öeldakse, et f on **monotoonne**, ja kirjutatakse $f : (D_1; \leq) \rightarrow (D_2; \preceq)$.

Identsuse monotoonsus

Identsus on monotoonne.

Tõestus.

Olgu $(D; \leq)$ järjestatud hulk.

– Iga $d_1, d_2 \in D$ korral

$$d_1 \leq d_2 \implies \text{id}(d_1) \leq \text{id}(d_2).$$

Monotoonsuse säilimine komponeerimisel

Monotoonsete funktsioonide kompositsioon on monotoonne.

Tõestus.

Olgu $(D_1; \leq)$, $(D_2; \preceq)$, $(D_3; \trianglelefteq)$ järjestatud hulgad.

Olgu $f : (D_1; \leq) \rightarrow (D_2; \preceq)$ ja $g : (D_2; \preceq) \rightarrow (D_3; \trianglelefteq)$.

– Iga $d_1, d_2 \in D_1$ korral

$$d_1 \leq d_2$$

$$\implies f(d_1) \preceq f(d_2)$$

$$\implies g(f(d_1)) \trianglelefteq g(f(d_2))$$

$$\iff (f ; g)(d_1) \trianglelefteq (f ; g)(d_2)$$

Ahel

Olgu $(D; \leq)$ järjestatud hulk.

Olgu $C \subseteq D$.

- Kui iga $x, y \in C$ korral $x \leq y$ või $y \leq x$, siis öeldakse, et C on ahel.

Ahela homomorfne kujutis

Ahela kujutis monotoonse funktsiooniga on ahel.

Tõestus.

Olgu $(D_1; \leq)$ ja $(D_2; \preceq)$ järjestatud hulgad.

Olgu $C \subseteq D_1$ ahel.

Olgu $f : (D_1; \leq) \rightarrow (D_2; \preceq)$.

– Olgu $x, y \in f(C)$, kus $f(C) = \{f(c) \mid c \in C\}$ on C kujutis.

Siis leiduvad $c_1, c_2 \in C$, nii et $x = f(c_1)$ ja $y = f(c_2)$.

Kuna C on ahel, siis $c_1 \leq c_2$ või $c_2 \leq c_1$.

Vastavalt $f(c_1) \preceq f(c_2)$ või $f(c_2) \preceq f(c_1)$.

See on sama mis $x \preceq y$ või $y \preceq x$.

Täielikud järjestatud hulgad

Täielik järjestatud hulk

Olgu $(D; \leq)$ järjestatud hulk.

Olgu iga ahela $C \subseteq D$ ülemraja $\bigvee C \in D$.

- Ütleme, et süsteem $(D; \leq, \bigvee)$ on täielik järjestatud hulk.

Vähima elemendi olemasolu

Igas täielikus järjestatud hulgas leidub vähim element.

Tõestus.

Olgu $(D; \leq, \bigvee)$ täielik järjestatud hulk.

$\emptyset \subseteq D$ on ahel.

Ülemraja kriteeriumi põhjal

$$z = \bigvee \emptyset$$

$$\iff \forall d \in D (z \leq d \iff \forall c \in \emptyset (c \leq d))$$

$$\iff \forall d \in D (z \leq d)$$

$$\iff z \text{ on järjestatud hulga } (D; \leq) \text{ vähim element}$$

Ülemraja kujutis kui ahela kujutise ülemtõke

Olgu $(D_1; \leq, \bigvee)$ ja $(D_2; \preceq, \bigvee)$ täielikud järjestatud hulgad.

Olgu $f : (D_1; \leq) \rightarrow (D_2; \preceq)$.

Olgu $C \subseteq D_1$ ahel.

• Siis

$$\bigvee \{f(c) \mid c \in C\} \preceq f(\bigvee C).$$

Tõestus.

$\bigvee C$ on C ülemtõke.

– Olgu $y \in \{f(c) \mid c \in C\}$ suvaline.

Mingi $c \in C$ korral $y = f(c)$.

Saame $c \leq \bigvee C$.

Seega $y = f(c) \preceq f(\bigvee C)$.

Kokkuvõttes $f(\bigvee C)$ on $\{f(c) \mid c \in C\}$ ülemtõke.

Seega $\bigvee \{f(c) \mid c \in C\} \preceq f(\bigvee C)$.

Pidevus, agarus

Olgu $(D_1; \leq, \bigvee)$ ja $(D_2; \preceq, \bigvee)$ täielikud järjestatud hulgad.

Olgu $f : D_1 \rightarrow D_2$.

- Kui f on monotoonne ja iga mittetühja ahela $C \subseteq D_1$ korral $\bigvee \{f(c) \mid c \in C\} = f(\bigvee C)$, siis öeldakse, et f on pidev.
- Olgu $\perp_1$ hulga D_1 vähim element ja $\perp_2$ hulga D_2 vähim element.
Kui $f(\perp_1) = \perp_2$, siis öeldakse, et f on agar.

Monotoonsuse nõue pole vajalik

Olgu $(D_1; \leq, \bigvee)$ ja $(D_2; \preceq, \bigvee)$ täielikud järjestatud hulgad.

Olgu $f : D_1 \rightarrow D_2$.

- Funktsioon f on pidev parajasti siis, kui iga mittetühja ahela $C \subseteq D_1$ korral $f(\bigvee C)$ on hulga $\{f(c) \mid c \in C\}$ ülemrajaks.

Tõestus.

- Tarvilikkus on triviaalne: kui f on pidev, siis toodud tingimus kehtib otse definitsiooni põhjal.
- Piisavuseks piisab näidata, et tingimust rahuldav f on monotoonne.

* Olgu $d_1, d_2 \in D_1$.

· Eeldame, et $d_1 \leq d_2$.

Siis $\{d_1, d_2\}$ on ahel D_1 -s,

mille suurim element on d_2 ,

järelikult $\bigvee \{d_1, d_2\} = d_2$.

Teoreemi eelduse järgi on $f(d_2) = f(\bigvee \{d_1, d_2\})$ hulga $\{f(d_1), f(d_2)\}$ ülemraja, seega ühtlasi ülemtõke.

Järelikult $f(d_1) \preceq f(d_2)$.

Pidevus ja agarus on sugulased

Olgu $(D_1; \leq, \bigvee)$ ja $(D_2; \preceq, \bigvee)$ täielikud järjestatud hulgad.

Olgu $f : D_1 \rightarrow D_2$.

- Funktsioon f on agar parajasti siis, kui tühja ahela $\emptyset$ korral $f(\bigvee \emptyset)$ on hulga $\{f(c) \mid c \in \emptyset\}$ ülemrajaks.

Tõestus.

$$\{f(c) \mid c \in \emptyset\} = \emptyset;$$

$$\text{olgu } \perp_1 = \bigvee \emptyset \text{ ja } \perp_2 = \bigvee \emptyset;$$

varasema põhjal $\perp_1$ on D_1 vähim element ja $\perp_2$ on D_2 vähim element.

Seega

f on agar

$$\iff f(\perp_1) = \perp_2$$

$$\iff f(\bigvee \emptyset) = \bigvee \emptyset$$

$$\iff f(\bigvee \emptyset) = \bigvee \{f(c) \mid c \in \emptyset\}.$$

Identsuse pidevus ja agarus

Identsus on nii pidev kui agar.

Tõestus.

Olgu $(D; \leq, \bigvee)$ täielik järjestatud hulk.

Olgu $C \subseteq D$ ahel.

Siis

$$\text{id}(\bigvee C) = \bigvee C = \bigvee \{c \mid c \in C\} = \bigvee \{\text{id } c \mid c \in C\}.$$

Konstantse funktsiooni pidevus

Konstantne funktsioon on pidev.

Tõestus.

Olgu $(D; \leq, \bigvee)$ täielik järjestatud hulk.

Olgu $a \in D$ fikseeritud element.

Olgu $C \subseteq D$ ahel.

Siis $(\lambda d. a)(\bigvee C) = a$;

samas $\{(\lambda d. a)(c) \mid c \in C\} = \{a \mid c \in C\} = \{a\}$.

a on $\{a\}$ ülemraja.

Pidevuse ja agaruse säilimine komponeerimisel

Pidevate funktsioonide kompositsioon on pidev;

agarate funktsioonide kompositsioon on agar.

Tõestus.

Olgu $(D_1; \leq, \bigvee)$, $(D_2; \preceq, \bigvee)$, $(D_3; \preceq, \bigvee)$ täielikud järjestatud hulgad.

Olgu $f : D_1 \rightarrow D_2$ ja $g : D_2 \rightarrow D_3$.

Olgu $\mathcal{X}$ omadus täielike järjestatud hulkade ahelatel.

- Eeldame, et f ja g kujutavad ahelad omadusega $\mathcal{X}$ ahelaiks omadusega $\mathcal{X}$ ning säilitavad omadusega $\mathcal{X}$ ahelate ülemrajad.

* Olgu $C \subseteq D_1$ ahel omadusega $\mathcal{X}$.

Saame

$$\begin{aligned}
 & (f ; g)(\bigvee C) \\
 &= g(f(\bigvee C)) \\
 &= g(\bigvee \{f(a) \mid a \in C\}) \\
 &= \bigvee \{g(b) \mid b \in \{f(a) \mid a \in C\}\} \\
 &= \bigvee \{g(f(a)) \mid a \in C\} \\
 &= \bigvee \{(f ; g)(a) \mid a \in C\}.
 \end{aligned}$$

Seega $f ; g$ säilitab omaduse $\mathcal{X}$ ning omadusega $\mathcal{X}$ ahelate ülemrajad.

- Võtame omaduseks $\mathcal{X}$ mittetühjuse.

Mittetühja ahela kujutis pideva funktsiooniga on mittetühi ahel.

Pidev funktsioon säilitab ka mittetühjade ahelate ülemrajad.

- Võtame omaduseks $\mathcal{X}$ tühjuse.

Agar funktsioon säilitab tühjuse ning tühja ahela ülemraja.

Kokkuvõttes pidevate või agarate funktsioonide kompositsioon on vastavalt pidev või agar.

Kleene püsipunktiteoreem

Lemma 1

Olgu $(D; \leq, \bigvee)$ täielik järjestatud hulk.

Olgu $f : D \rightarrow D$ monotoonne funktsioon.

Olgu $\perp = \bigvee \emptyset$ hulga D vähim element.

- Hulk $\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\}$ on ahel.

Tõestus.

- Olgu $i \in \mathbb{N}$.

Et $\perp$ on vähim element, siis $\perp \leq f^i(\perp)$ ehk $f^0(\perp) \leq f^{0+i}(\perp)$.

Monotoonsuse tõttu iga $n \in \mathbb{N}$ korral $(f^n(\perp) \leq f^{n+i}(\perp) \implies f^{n+1}(\perp) \leq f^{n+1+i}(\perp))$.

Induktsiooniga saame $\forall n \in \mathbb{N} (f^n(\perp) \leq f^{n+i}(\perp))$.

Seega iga $n, i \in \mathbb{N}$ korral $f^n(\perp) \leq f^{n+i}(\perp)$.

- Olgu $x, y \in \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Mingite $m, n \in \mathbb{N}$ korral $x = f^m(\perp)$ ja $y = f^n(\perp)$.

Kehtib $m \leq n$ või $n \leq m$.

Vastavalt $n = m + i$ või $m = n + i$ mingi $i \in \mathbb{N}$ korral.

Eelnevast vastavalt $f^m(\perp) \leq f^n(\perp)$ või $f^n(\perp) \leq f^m(\perp)$.

Seega vastavalt $x \leq y$ või $y \leq x$.

Lemma 2

Olgu $(D; \leq, \bigvee)$ täielik järjestatud hulk.

Olgu $f : D \rightarrow D$ monotoonne funktsioon.

Olgu $\perp = \bigvee \emptyset$ hulga D vähim element.

- Siis $\bigvee \{f^{n+1}(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Tõestus.

Kuna $\bigvee(\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{\perp\})$ on hulga $\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{\perp\}$ ülemtõke, siis ühtlasi ka hulga $\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ülemtõke, järelikult

$$\bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \leq \bigvee(\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{\perp\}).$$

Kuna $\bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ on hulga $\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ülemtõke ja $\perp \leq \bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, siis on ta ühtlasi ka hulga $\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{\perp\}$ ülemtõke, järelikult

$$\bigvee(\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{\perp\}) \leq \bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Kokkuvõttes

$$\bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = \bigvee(\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{\perp\}).$$

Seega

$$\begin{aligned} & \bigvee \{f^{n+1}(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \\ &= \bigvee(\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{\perp\}) \\ &= \bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Lemma 3

Olgu $(D; \leq, \bigvee)$ täielik järjestatud hulk.

Olgu $f : D \rightarrow D$ monotoonne funktsioon.

Olgu $\perp = \bigvee \emptyset$ hulga D vähim element.

- Iga $x \in D$ korral $f(x) \leq x \Rightarrow \bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq x$.

Tõestus.

$\perp \leq x$ ehk $f^0(\perp) \leq x$.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral kui $f^n(x) \leq x$, siis $f^{n+1}(\perp) \leq f(\perp) \leq x$.

Induktsiooniga $\forall n \in \mathbb{N} (f^n(\perp) \leq x)$.

Järelikult $\bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq x$.

Kleene püsipunktiteoreem

Olgu $(D; \leq, \bigvee)$ täielik järjestatud hulk.

Olgu $f : D \rightarrow D$ pidev funktsioon.

Olgu $\perp = \bigvee \emptyset$ hulga D vähim element.

• Element

$$\text{fix } f = \bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

on funktsiooni f vähim püsipunkt.

Tõestus.

Lemmast 2 saame $\bigvee \{f^{n+1}(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Seega

$$\begin{aligned} f(\text{fix } f) &= f(\bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\}) \\ &= \bigvee \{f^{n+1}(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigvee \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \text{fix } f. \end{aligned}$$

ehk $\text{fix } f$ on f püsipunkt.

– Olgu z funktsiooni f püsipunkt.

Siis $f(z) \leq z$.

Lemmast 3 saame $\text{fix } f \leq z$.

Kokkuvõttes $\text{fix } f$ on f vähim püsipunkt.

Semantika püsipunktide kaudu

Konkreetsed järjestatud hulgad

Järjestusseosed: üldised konstruktsioonid

Olgu $(D; \leq)$ suvaline järjestatud hulk.

- Defineerime seose $\preceq$ hulgal $1 + D = D \cup \{\perp\}$, kandes järjestuse D siia üle ja interpreteerides elementi $\perp$ vähimana:

$$a \preceq b \iff a \leq b \vee a = \perp.$$

- Defineerime seose $\sqsubseteq$ suvalisel funktsioonihulgal $A \rightarrow D$, kandes seose $\leq$ komponenthaaval funktsioonidele üle:

$$f \sqsubseteq g \iff \forall a \in A (f(a) \leq g(a)).$$

Järjestusseos: kontroll $\perp$ lisamise korral

Seos $\preceq$ hulgal $D \cup \{\perp\}$ on järjestusseos, kusjuures $\perp$ on vähim element.

Tõestus.

- Kui $x \in D$, siis $x \preceq x$, sest $x \leq x$.
Lisaks $\perp \preceq \perp$ definitsiooni põhjal.
- Olgu $x, y, z \in D \cup \{\perp\}$, nii et $x \preceq y$ ja $y \preceq z$.
 - * Kui $x, y, z \in D$, siis $x \leq y \leq z$, kust $x \preceq z$.
 - * Kui x, y, z pole kõik D -s, siis igal juhul $x = \perp$ ja definitsioonist $x \preceq z$.

Seega igal juhul $x \preceq z$.

- Olgu $x, y \in D \cup \{\perp\}$, nii et $x \preceq y$ ja $y \preceq x$.
 - * Kui $x, y \in D$, siis $x \leq y \leq x$, kust $x = y$.
 - * Kui x, y pole kõik D -s, siis ainsa võimalusena $x = y = \perp$.

Seega igal juhul $x = y$.

Seega $\preceq$ on järjestus.

Iga $x \in D \cup \perp$ korral $\perp \preceq x$, seega $\perp$ on vähim element.

Järjestusseosed: kontroll funktsioonidel

Seos $\sqsubseteq$ hulgal $A \rightarrow D$ on järjestusseos, kusjuures $\lambda a. \perp$ on vähim element.

Tõestus.

- Iga $f \in A \rightarrow D$ korral kehtib $f(a) \leq f(a)$ iga $a \in A$ jaoks, järelikult $f \sqsubseteq f$.
- Iga $f, g, h \in A \rightarrow D$ korral kui $f \sqsubseteq g$ ja $g \sqsubseteq h$, siis $f(a) \leq g(a)$ ja $g(a) \leq h(a)$, seega ka $f(a) \leq h(a)$, iga $a \in A$ jaoks, järelikult $f \sqsubseteq h$.
- Iga $f, g \in A \rightarrow D$ korral kui $f \sqsubseteq g$ ja $g \sqsubseteq f$, siis $f(a) \leq g(a)$ ja $g(a) \leq f(a)$, seega ka $f(a) = g(a)$, iga $a \in A$ jaoks, järelikult funktsioonide ekstensionaalsusest $f = g$.

Seega $\sqsubseteq$ on järjestus.

Iga $f \in A \rightarrow D$ korral kehtib $(\lambda a. \perp)(a) = \perp \leq f(a)$ iga $a \in A$ korral, andes $\lambda a. \perp \sqsubseteq f$, seega $\lambda a. \perp$ on vähim element.

Funktsioonihulkade ülemrajad

Olgu $(D; \leq)$ järjestatud hulk.

Olgu $F \subseteq A \rightarrow D$ mingi hulga A korral.

Olgu $g \in A \rightarrow D$ selline, et iga $a \in A$ korral $g(a)$ on $\{f(a) \mid f \in F\}$ ülemraja.

- Siis g on F ülemraja järjestatud hulgas $(A \rightarrow D; \sqsubseteq)$.

Tõestus.

– Iga $h \in A \rightarrow D$ korral saame

$$\begin{aligned}
 g &\sqsubseteq h \\
 &\iff \forall a \in A (g(a) \leq h(a)) \\
 &\iff \forall a \in A (\forall y \in \{f(a) \mid f \in F\} (y \leq h(a))) \\
 &\iff \forall a \in A (\forall f \in F (f(a) \leq h(a))) \\
 &\iff \forall f \in F (\forall a \in A (f(a) \leq h(a))) \\
 &\iff \forall f \in F (f \sqsubseteq h).
 \end{aligned}$$

Ülemraja kriteeriumi põhjal g on F ülemraja.

Konkreetsed järjestatud hulgad

Kanname diskreetse järjestusseose = hulgale State järk-järgult üle hulkadele $\text{State} \cup \{\perp\}$, Act , Env ja $\text{Env} \rightarrow \text{Env}$.

- Nii saadud järjestust hulgale $\text{State} \cup \{\perp\}$ tähistame $\leq$.
- Nii saadud järjestust hulgale $\text{Act} = \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$ tähistame $\sqsubseteq$.

Olekuahelad

Olgu $C \subseteq \text{State} \cup \{\perp\}$ ahel järjestatud hulgas $(\text{State} \cup \{\perp\}; \leq)$.

- Siis C sisaldab ülimalt 2 elementi.

Tõestus.

– Olgu $x, y \in C, x \neq y$.

Üldisust kitsendamata $x \leq y$.

Siis $x = \perp, y \neq \perp$.

* Olgu veel $z \in C$.

Siis $y \leq z$ või $z \leq y$.

· Kui $y \leq z$, siis $y \neq \perp$ tõttu $y = z$.

· Kui $z \leq y$, siis $z = \perp$ või $z = y$.

Igal juhul niisiis $z = \perp$ või $z = y$.

Kokkuvõttes C ei sisalda peale x, y ühtegi muud elementi.

Järelikult C koosneb ülimalt 2 elemendist.

Funktsiooniahelad

Olgu $C \subseteq \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$ ahel järjestatud hulgas $(\text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}; \sqsubseteq)$.

Olgu $s \in \text{State}$.

- Siis $\{f(s) \mid f \in C\}$ on ahel järjestatud hulgas $(\text{State} \cup \{\perp\}; \leq)$.

Tõestus.

- Olgu $x, y \in \{f(s) \mid f \in C\}$.

Mingite $f, g \in C$ korral $x = f(s)$ ja $y = g(s)$.

Kuna C on ahel, siis $f \sqsubseteq g$ või $g \sqsubseteq f$.

Seega $f(s) \leq g(s)$ või $g(s) \leq f(s)$,

ehk samaväärselt $x \leq y$ või $y \leq x$.

Olekuahelate ülemrajad: leidumine

Järjestatud hulga $(\text{State} \cup \{\perp\}; \leq)$ igal ahelal leidub ülemraja.

Tõestus.

Olgu $C \subseteq \text{State} \cup \{\perp\}$ ahel.

Teame, et C on sisaldab ülimalt 2 elementi.

- Kui C on 0-elemendiline, siis vähim element $\perp$ on tema ülemraja.

Kui C on 1-elemendiline, siis tema ainus element on temas suurim, järelikult tema ülemraja.

Kui C on 2-elemendiline, olgu $C = \{x, y\}$, siis kuna ta on ahel, siis $x \leq y$ või $y \leq x$, st C üks elementidest on tema suurim element, tema on ühtlasi C ülemraja.

Olekuahelate ülemrajad: tähistus

Iga ahela $C \subseteq \text{State} \cup \{\perp\}$ ülemraja tähistame $\bigvee C$.

- Siis $(\text{State} \cup \{\perp\}; \leq, \bigvee)$ on täielik järjestatud hulk.

Funktsiooniahelate ülemrajad: leidumine

Olgu $C \subseteq \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$ ahel järjestatud hulgas $(\text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}; \sqsubseteq)$.

- Siis $\lambda s. \bigvee \{f(s) \mid f \in C\}$ on C ülemraja.

Tõestus.

Järeldub otseselt lausest funktsioonihulkade ülemrajade kohta.

Funktsiooniahelate ülemraja: tähistus

Iga ahela $C \subseteq \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$ ülemraja tähistame $\sqcup C$.

- $(\text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}; \sqsubseteq, \sqcup)$ on täielik järjestatud hulk.
- Iga ahela $C \subseteq \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$ ja $s \in \text{State}$ korral

$$(\sqcup C)(s) = \bigvee \{f(s) \mid f \in C\}.$$

Tsükli semantika

Tsüklile vastav semantiline tehe

Võtame aluseks ja uurime definitsiooni

$$\text{while}(e, t) \\ = \lambda e.$$

$$\text{fix}(\lambda g. \lambda s. \text{wrap}(e(s)) \left\{ \begin{array}{ll} (t(e) ; g)(s) & \text{kui } e(s) = \mathbb{tt} \\ s & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}).$$

Et see oleks püsipunktiteooria põhjal korrektne definitsioon, peaks iga $e \in \text{State} \rightarrow 1 + \mathbb{T}$, $t \in \text{Act}$, $e \in \text{Env}$ korral teisendus

$$\lambda g. \lambda s. \text{wrap}(e(s)) \left\{ \begin{array}{ll} (t(e) ; g)(s) & \text{kui } e(s) = \mathbb{tt} \\ s & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}$$

hulgal $\text{Act} = \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$ olema pidev funktsioon.

Põhilemma

Olgu $a, b \in \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$.

Olgu p predikaat olekutel, mis rahuldab tingimust

$$\forall s \in \text{State} (p(s) \implies a(s) \neq \perp).$$

- Funktsioon

$$\lambda g. \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} g(a(s)) & \text{kui } p(s) \\ b(s) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}$$

on pidev.

Tõestus.

Olgu $C \subseteq \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$ mittetühi ahel.

$$\begin{aligned} & (\lambda g. \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} g(a(s)) & \text{kui } p(s) \\ b(s) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\})(\sqcup C) \\ &= \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} (\sqcup C)(a(s)) & \text{kui } p(s) \\ b(s) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\ &= \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} \bigvee \{c(a(s)) \mid c \in C\} & \text{kui } p(s) \\ \bigvee \{b(s) \mid c \in C\} & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\ &= \lambda s. \bigvee \left\{ \left\{ \begin{array}{ll} c(a(s)) & \text{kui } p(s) \\ b(s) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \mid c \in C \right\}. \end{aligned}$$

Eelneva põhjal on see funktsioon parajasti hulga

$$\left\{ \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} c(a(s)) & \text{kui } p(s) \\ b(s) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \mid c \in C \right\}$$

ülemraja.

Vaatlus 1: kompositsioon

Olgu $e \in \text{State} \rightarrow \mathbb{T} \cup \{\perp\}$, $t \in \text{Act} = \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$,
 $e \in \text{Env}$.

- Võttes $a = t(e)$, $b = \lambda s. \perp$, $p(s) = (a(s) \neq \perp)$, saame

$$\begin{aligned}
 & \lambda g. \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} g(a(s)) & \text{kui } p(s) \\ b(s) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\
 &= \lambda g. \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} g(a(s)) & \text{kui } a(s) \neq \perp \\ \perp & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\
 &= \lambda g. a ; g \\
 &= \lambda g. t(e) ; g.
 \end{aligned}$$

Järelikult $\lambda g. t(e) ; g$ on pidev.

Vaatlus 2: hargnemine

Olgu $e \in \text{State} \rightarrow \mathbb{T} \cup \{\perp\}$.

- Võttes $a = b = \text{id}$ ja $p(s) = (e(s) = \text{tt})$, saame

$$\begin{aligned} \lambda g. \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} g(a(s)) & \text{kui } p(s) \\ b(s) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\ = \lambda g. \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} g(s) & \text{kui } e(s) = \text{tt} \\ s & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\lambda g. \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} g(s) & \text{kui } e(s) = \text{tt} \\ s & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}$$

on pidev.

Vaatlus 3: veapüünismähis

Olgu $e \in \text{State} \rightarrow \mathbb{T} \cup \{\perp\}$.

- Võttes $a = \text{id}$, $b = \lambda s. \perp$, $p(s) = (e(s) \neq \perp)$, saame

$$\begin{aligned} & \lambda g. \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} g(a(s)) & \text{kui } p(s) \\ b(s) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\ &= \lambda g. \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} g(s) & \text{kui } e(s) \neq \perp \\ \perp & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\ &= \lambda g. \lambda s. \text{wrap}(e(s))(g(s)). \end{aligned}$$

Järelikult $\lambda g. \lambda s. \text{wrap}(e(s))(g(s))$ on pidev.

Definitsiooni korrektsus

Semantiline tehe `while` on püsipunkti abil korrektselt defineeritud.

Tõestus.

Olgu $e \in \text{State} \rightarrow \mathbb{T} \cup \{\perp\}$, $t \in \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$, $e \in \text{Env}$.

Komponeerime kolm funktsiooni, mille pidevuse tõestasime:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda g. t(e) ; g) ; \\
 & (\lambda g. \lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} g(s) & \text{kui } e(s) = \text{tt} \\ s & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}) ; \\
 & (\lambda g. \lambda s. \text{wrap}(e(s))(g(s))) \\
 & = \lambda g. \lambda s. \text{wrap}(e(s)) \\
 & \quad ((\lambda s. \left\{ \begin{array}{ll} (t(e) ; g)(s) & \text{kui } e(s) = \text{tt} \\ s & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}))(s)) \\
 & = \lambda g. \lambda s. \text{wrap}(e(s)) \left\{ \begin{array}{ll} (t(e) ; g) & \text{kui } e(s) = \text{tt} \\ s & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Seega funktsioon, mille püsipunkti $\text{while}(e, t)(e)$ nõuab, on pidev.

Tähistus

Iga $e \in \text{State} \rightarrow \mathbb{T} \cup \{\perp\}$, $t \in \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$, $e \in \text{Env}$ korral tähistagu

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(e, t, e) \\ = \lambda g. \lambda s. \text{wrap}(e(s)) \left\{ \begin{array}{ll} (t(e) ; g)(s) & \text{kui } e(s) \neq \perp \\ s & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Siis

$$\text{while}(e, t)(e)(s) = \text{fix}(\mathcal{W}(e, t, e))(s).$$

Püsipunkti avaldamine iteratsiooni kaudu

Kleene teoreemi põhjal saame

$$\begin{aligned} \text{while}(e, t)(e)(s) \\ = \text{fix}(\mathcal{W}(e, t, e))(s) \\ = (\bigsqcup \{(\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp) \mid n \in \mathbb{N}\})(s) \\ = \bigvee \{(\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp)(s) \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Normaalselt lõpetav iteratsioon

Olgu $e \in \text{State} \rightarrow \mathbb{T} \cup \{\perp\}$, $t \in \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$, $e \in \text{Env}$, $s \in \text{State}$.

- Kui mingi $n \in \mathbb{N}$ korral kehtib

$$\begin{aligned} & \forall i \leq n \ ((t(e))^i(s) \neq \perp) \\ & \wedge \forall i < n \ (e((t(e))^i(s)) = \text{tt}) \\ & \wedge e((t(e))^n(s)) = \text{fff}, \end{aligned}$$

siis $(\mathcal{W}(e, t, e))^{n+1}(\lambda s. \perp)(s) = (t(e))^n(s)$.

Tõestus.

Kui $n = 0$, saame

$$\begin{aligned} & (\mathcal{W}(e, t, e))^1(\lambda s. \perp)(s) \\ &= \mathcal{W}(e, t, e)(\lambda s. \perp)(s) \\ &= \text{wrap}(e(s)) \left\{ \begin{array}{l} (t(e) ; (\lambda s. \perp))(s) \quad \text{kui } e(s) = \text{tt} \\ s \quad \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} (t(s) ; (\lambda s. \perp))(s) \quad \text{kui } e(s) = \text{tt} \\ s \quad \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\ &= s \\ &= (t(e))^0(s). \end{aligned}$$

Kehtigu väide $n - 1$ korral ja eeldus n korral. Kuna eeldus kehtib $n - 1$ jaoks, kui s rolli võtta $t(e)(s)$, siis n jaoks saame

$$\begin{aligned} & (\mathcal{W}(e, t, e))^{n+1}(\lambda s. \perp)(s) \\ &= \mathcal{W}(e, t, e)((\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp))(s) \\ &= \text{wrap}(e(s)) \left\{ \begin{array}{l} (t(e) ; (\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp))(s) \quad \text{kui } e(s) = \text{tt} \\ s \quad \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} (t(e) ; (\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp))(s) \quad \text{kui } e(s) = \text{tt} \\ s \quad \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\ &= (t(e) ; (\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp))(s) \\ &= (\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp)(t(e)(s)) \\ &= (t(e))^{n-1}(t(e)(s)) \\ &= (t(e))^n(s). \end{aligned}$$

Veaga lõpetav või lõpmatu iteratsioon

Olgu $e \in \text{State} \rightarrow \mathbb{T} \cup \{\perp\}$, $t \in \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$, $e \in \text{Env}$, $s \in \text{State}$.

- Kui

$$\begin{aligned} & \forall i \leq n ((t(e))^i(s) \neq \perp) \\ & \wedge \forall i < n (e((t(e))^i(s)) = \text{tt}) \\ & \wedge e((t(e))^n(s)) = \text{ff}, \end{aligned}$$

ei kehti ühegi $n \in \mathbb{N}$ korral, siis $(\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp)(s) = \perp$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Tõestus.

Eeldusest järeldub $e(s) \neq \text{ff}$, muidu kehtiks tingimus $n = 0$ korral.

Juhul $n = 0$ muidugi

$$(\mathcal{W}(e, t, e))^0(\lambda s. \perp)(s) = (\lambda s. \perp)(s) = \perp.$$

Kehtigu väide n korral. Kui eeldus ei kehtiks $t(e)(s)$ korral s rollis, peaks kindlasti olema kas $s = (t(e))^0(s) = \perp$, mis on võimatu, või $e(s) = e((t(e))^0(s)) \neq \text{tt}$, st $e(s) = \perp$. Sellega arvestades saame

$$\begin{aligned} & (\mathcal{W}(e, t, e))^{n+1}(\lambda s. \perp)(s) \\ &= \mathcal{W}(e, t, e)((\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp))(s) \\ &= \text{wrap}(e(s)) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} (t(e) ; (\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp))(s) & \text{kui } e(s) = \text{tt} \\ s & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \perp & \text{kui } e(s) = \perp \\ (t(e) ; (\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp))(s) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \perp & \text{kui } e(s) = \perp \\ \perp & \text{kui } t(e)(s) = \perp \\ (\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp)(t(e)(s)) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{array} \right\} \\ &= \perp. \end{aligned}$$

Definitsioonide samaväärsus

Olgu $e \in \text{State} \rightarrow \mathbb{T} \cup \{\perp\}$, $t \in \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$, $e \in \text{Env}$, $s \in \text{State}$.

- Siis

$$\begin{aligned} & \text{while}(e, t)(e)(s) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} (t(e))^n(s) & \text{kui: } \forall i \leq n ((t(e))^i(s) \neq \perp), \\ & \forall i < n (e((t(e))^i(s)) = \text{tt}), \\ & e((t(e))^n(s)) = \text{fff} \\ \perp, & \text{kui sellist } n \text{ ei leidu} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

St while definitsioon püsipunktiga annab sama tulemuse kui varemesetatud otsene definitsioon.

Tõestus.

- Kui mingi $n \in \mathbb{N}$ korral kehtib

$$\begin{aligned} & \forall i \leq n ((t(e))^i(s) \neq \perp) \\ & \wedge \forall i < n (e((t(e))^i(s)) = \text{tt}) \\ & \wedge e((t(e))^n(s)) = \text{fff}, \end{aligned}$$

siis normaalselt lõpetava iteratsiooni vaatluse põhjal

$$(\mathcal{W}(e, t, e))^{n+1}(\lambda s. \perp)(s) = (t(e))^n(s) \in \text{State}.$$

Kuna iga $t \in \text{State} \rightarrow \text{State} \cup \{\perp\}$ maksimaalne element (st temast ei leidu suuremat), siis

$$\begin{aligned} & \text{while}(e, t)(e)(s) \\ &= \bigvee \{ (\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp)(s) \mid n \in \mathbb{N} \} \\ &= (\mathcal{W}(e, t, e))^{n+1}(\lambda s. \perp)(s) \\ &= (t(e))^n(s). \end{aligned}$$

- Vastasel korral saame veaga lõpetava või lõpmatu iteratsiooni vaatlusest

$$\begin{aligned} & \text{while}(e, t)(e)(s) \\ &= \bigvee \{ (\mathcal{W}(e, t, e))^n(\lambda s. \perp)(s) \mid n \in \mathbb{N} \} \\ &= \bigvee \{ \perp \} \\ &= \perp. \end{aligned}$$

Rekursiooni semantika

Järjestus

Hulga $Env \rightarrow Env$ saab eelpoolkirjeldatud viisil teha täielikuks järjestatud hulgaks.

Vastavat järjestusseost ja ahelate ülemrajaoperatsiooni tähistame vastavalt $\sqsubseteq$ ja $\sqcup$.

Mida vaja 1

Et fix oleks korrektselt defineeritud, peaks $\lambda g. g ; \mathcal{D}(D)$ olema pidev iga $D \in \text{Decl}$ korral.

St, iga ahela $C \subseteq \text{Env} \rightarrow \text{Env}$ korral peaks

$$(\lambda g. g ; \mathcal{D}(D))(\bigsqcup C) = \bigsqcup C ; \mathcal{D}(D)$$

olema hulga

$$\{(\lambda g. g ; \mathcal{D}(D))(c) \mid c \in C\} = \{c ; \mathcal{D}(D) \mid c \in C\}$$

ülemraja.

Mida vaja 2

Piisab näidata, et iga $e \in \text{Env}$ korral

$$(\bigsqcup C ; \mathcal{D}(D))(e) = \mathcal{D}(D)((\bigsqcup C)(e)) = \mathcal{D}(D)(\bigsqcup \{c(e) \mid c \in C\})$$

on hulga

$$\begin{aligned} & \{(c ; \mathcal{D}(D))(e) \mid c \in C\} \\ &= \{\mathcal{D}(D)(c(e)) \mid c \in C\} \\ &= \{\mathcal{D}(D)(d) \mid d \in \{c(e) \mid c \in C\}\} \end{aligned}$$

ülemraja.

Selleks piisab näidata, et $\mathcal{D}(D)$ on iga $D \in \text{Decl}$ korral pidev.