

Programmeerimiskeelte semantika

Võreteooria

Toomas Römer

toomasr@gmail.com

Tartu Ülikool

Matemaatika-Informaatika Teaduskond

Arvutiteaduse Instituut

Teemad

Ettekandes käsitletavat teemad:

- Täielik võre
- Funktsioonide omadusi
- Ahelad
- Püsipunktid

Täielik võre $L = (L, \sqsubseteq) = (L, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$

Definitsioon:

- Osaliselt järjestatud hulk $(L, \sqsubseteq)$
 - Kõikidel hulga L alamhulkadel eksisteerib alamraja.
 - Kõikidel hulga L alamhulkadel eksisteerib ülemraja.
- Vähim element on $\perp = \sqcup \emptyset = \sqcap L$
- Suurim element on $\top = \sqcap \emptyset = \sqcup L$

Võre näide

Kui $L = (P(S), \subseteq)$ hulga S puhul, siis:

- $\subseteq$ on $\subseteq$
- $\forall Y \in P(S) \sqcup Y = \bigcup Y$ ning $\sqcap Y = \bigcap Y$
- $\perp = \emptyset$ ja $\top = S$

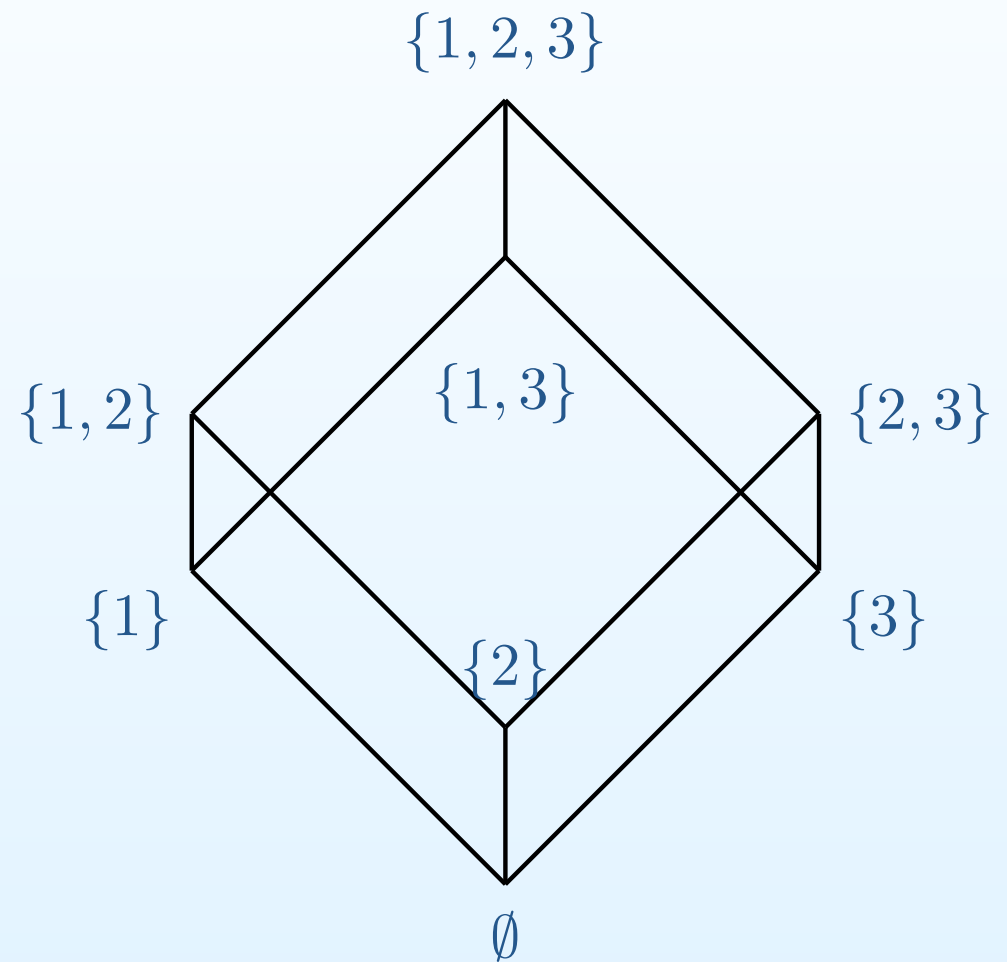
Kui $L = (P(S), \supseteq)$ hulga S puhul, siis:

- $\supseteq$ on $\supseteq$
- $\forall Y \in P(S) \sqcup Y = \bigcap Y$ ning $\sqcap Y = \bigcup Y$
- $\top = \emptyset$ ja $\perp = S$

Seega $(P(S), \subseteq)$ ja $(P(S), \supseteq)$ on täielikud võred.

Võre näide jätk. $S = \{1, 2, 3\}$

Diagrammil liigub joon "ülesse poole" juhul kui mõne l_1 ja l_2



puhul kehtib $l_1 \subseteq l_2$.

Lemma A.2

Osalise järjestusega hulga $L = (L, \sqsubseteq)$ puhul on järgmised väited samaväärsed:

- (i) L on täielik võre.
- (ii) Kõikidel hulga L alamhulkadel on ülemine raja.
- (iii) Kõikidel hulga L alamhulkadel on alumine raja.

Tõestus

- (i) $\Rightarrow$ (ii) on ilmne.
- (i) $\Rightarrow$ (iii) on ilmne.

Lemma A.2 jätk 1

Näitamaks, et $(ii) \Rightarrow (i)$ fikseerime $Y \subseteq L$ ning defineerime

$$\sqcap Y = \sqcup \{l \in L \mid \forall l' \in Y : l \sqsubseteq l'\}$$

- Avaldise parema poole hulgas on hulga Y alumised tõkked.
- Avaldise parema poole väärtuseks on suurim hulga Y alumine tõke.

Lemma A.2 jätk 2

Näitamaks, et $(iii) \Rightarrow (i)$ fikseerime $Y \subseteq L$ ning defineerime

$$\sqcup Y = \sqcap \{l \in L \mid \forall l' \in Y : l' \sqsubseteq l\}$$

- Avaldise parema poole hulgas on hulga Y ülemised tõkked.
- Avaldise parema poole väärtuseks on vähim hulga Y ülemine tõke.

Funktsioonide omadusi

Olgu funktsioon $f : L_1 \rightarrow L_2$ osaliselt järjestatud hulkade $L_1 = (L_1, \sqsubseteq_1)$ ja $L_2 = (L_2, \sqsubseteq_2)$ vahel.

- Monotoonsus — Kui $\forall l, l' \in L_1 : l \sqsubseteq_1 l' \Rightarrow f(l) \sqsubseteq_2 f(l')$
- Aditiivsus — Kui $\forall l_1, l_2 \in L_1 : f(l_1 \sqcup l_2) = f(l_1) \sqcup f(l_2)$
- Multiplikatiivsus — Kui $\forall l_1, l_2 \in L_1 : f(l_1 \sqcap l_2) = f(l_1) \sqcap f(l_2)$
- Täis aditiivsus — Kui iga $Y \subseteq L_1$:
 $f(\bigsqcup_1 Y) = \bigsqcup_2 \{f(l') \mid l' \in Y\}$ kui $\bigsqcup_1 Y$ eksisteerib.
- Täis multiplikatiivsus — Kui iga $Y \subseteq L_1$:
 $f(\bigsqcap_1 Y) = \bigsqcap_2 \{f(l') \mid l' \in Y\}$ kui $\bigsqcap_1 Y$ eksisteerib.

Funktsioonide omadusi jätkub

- Afiinne — Kui iga $Y \subseteq L_1 : f(\bigsqcup_1 Y) = \bigsqcup_2 \{f(l') \mid l' \in Y\}$ kui $\exists \bigsqcup_1 Y$ ja $Y \neq \emptyset$.
- Range — Kui $f(\perp_1) = \perp_2$

Märkus: Funktsioon täielikel võredel on täiesti aditiivne siis ja ainult siis kui ta on afiinne ja range.

Isomorfism

- $(L_1, \sqsubseteq_1)$ ja $(L_2, \sqsubseteq)$ on osaliselt järjestatud hulgad.
- id_i on identsus funktsioon üle hulga $L_i, i = 1, 2$
- *Isomorfism* on monotoonne funktsioon $\Theta : L_1 \rightarrow L_2$
- $\exists \Theta^{-1} : L_2 \rightarrow L_1$
- $\Theta \circ \Theta^{-1} = id_2$ ja $\Theta^{-1} \circ \Theta = id_1$

Ahelad - sissejuhatus

Definitsioon: Alamhulk $Y \subseteq L$, kus L on osaliselt järjestatud hulk $L = (L, \sqsubseteq)$, on ahel kui:

$$\forall l_1, l_2 \in Y : (l_1 \sqsubseteq l_2) \vee (l_1 \sqsupseteq l_2)$$

Seega ahel on hulga L alamhulk (võib ka tühihulk olla), mis on täielikult järjestatud.

Me ütleme, et ahel on *lõplik* ahel, kui tegemist on hulga L lõpliku alamhulgaga.

Ahelad - reduktiivne, ekstensiivne

Hulga L elementide jada $(l_n)_n = (l_n)_{n \in N}$ on reduktiivne kui:

$$n \leq m \Rightarrow l_n \sqsubseteq l_m$$

Hulga L elementide jada $(l_n)_n = (l_n)_{n \in N}$ on ekstensiivne kui:

$$n \leq m \Rightarrow l_n \sqsupseteq l_m$$

Me ütleme, et ahel $(l_n)_n$ *stabiliseerub* siis ja ainult siis kui:

$$\exists n_0 \in N : \forall n \in N : n \geq n_0 \Rightarrow l_n = l_{n_0}$$

- jada $(l_n)_n$ puhul me tähistame $\bigsqcup \{l_n \mid n \in N\}$ kui $\bigsqcup_n l_n$
- jada $(l_n)_n$ puhul me tähistame $\bigsqcap \{l_n \mid n \in N\}$ kui $\bigsqcap_n l_n$

Püsipunktid

Fikseerime monotoonse funktsiooni $f : L \rightarrow L$ täisvõrel $L = (L, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$.

- Funktsiooni f *püsipunkt* on element $l \in L$ nii, et $f(l) = l$ ja me kirjutame:

$$Fix(f) = \{l \mid f(l) = l\}$$

näitamaks funktsiooni püsipunkte.

Kuna L on täisvõre siis $\exists \sqcap Fix(f)$ ning me kirjutame

$$lfp(f) = \sqcap Fix(f)$$

Samamoodi ka $\exists \sqcup Fix(f)$ ning me kirjutame

$$gfp(f) = \sqcup Fix(f)$$

Reduktiivsed ja ekstensiivsed funktsioonid

- Funktsioon f on *reduktiivne kohal* I siis ja ainult siis kui $f(l) \sqsubseteq l$ ja kirjutame:

$$Red(f) = \{l \mid f(l) \sqsubseteq l\}$$

Me ütleme, et f on *ekstensiivne* kui $Red(f) = L$.

- Funktsioon f on *ekstensiivne kohal* I siis ja ainult siis kui $f(l) \sqsupseteq l$ ja kirjutame:

$$Ext(f) = \{l \mid f(l) \sqsupseteq l\}$$

Me ütleme, et f on *ekstensiivne* kui $Ext(f) = L$.

Tarski püsipunkti teoreem

L on täisvõre $L = (L, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$.

Kui $f : L \rightarrow L$ on monotoonne funktsioon siis kehtivad:

- $lfp(f) = \sqcap Red(f) \in Fix(f)$
- $gfp(f) = \sqcup Ext(f) \in Fix(f)$

Tõestus (i):

- Defineerime $l_0 = \sqcap Red(f)$
- Lemma $a \text{ — } f(l_0) \sqsubseteq l_0$
- Lemma $b \text{ — } f(l_0) \sqsupseteq l_0$
- Lemma $c \text{ — } \sqcap Red(f) = lfp(f)$

Lemma a — $f(l_0) \sqsubseteq l_0$

Kuna:

- $\forall l \in Red(f) \ l_0 \sqsubseteq l$
- f on monotoonne funktsioon.

Me saame:

$$\forall l \in Red(f) \ f(l_0) \sqsubseteq f(l) \sqsubseteq l$$

Seega:

$$f(l_0) \sqsubseteq l_0$$

Lemma $b \multimap l_0 \sqsubseteq f(l_0)$

Kuna:

- $f(f(l_0)) \sqsubseteq f(l_0)$
- $f(l_0) \in Red(f)$

Seega l_0 definitsiooni põhjal saame:

$$l_0 \sqsubseteq f(l_0)$$

Lemma $c \text{ — } l_0 = lfp(f)$

Eelmiste lemmade:

- $f(l_0) \sqsubseteq l_0$
- $f(l_0) \sqsupseteq l_0$

põhjal saame, et $l_0 \in Fix(f)$.

- $Fix(f) \subseteq Red(f)$

Seega $lfp(f) = l_0$.

Aitäh

Küsibusi?