

Formaalsete keelte teooria

Definitsioonid ja teoreemid

Mati Pentus

<http://lpcs.math.msu.su/~pentus/ftp/fkt/>

13. november 2009. a.

Definitsioon 1. *Naturaalarvudeks* nimetame mittenegatiivseid täisarve. Naturaalarvude hulka $\{0, 1, 2, \dots\}$ tähistame sümboliga $\mathbb{N}$.

Definitsioon 2. *Tähestik (alfabeet)* on suvaline mittetühi lõplik hulk. Tähestiku elemente nimetatakse *sümboliteks*.

Definitsioon 3. *String (sõna)* tähestikus Σ on lõplik sümbolite jada, kus iga sümbol kuulub hulka Σ .

Definitsioon 4. *Tühi string* on string, mis ei sisalda ühtegi sümbolit (tähistus ε).

Definitsioon 5. Tähestiku Σ kõikide stringide hulka tähistatakse Σ^* .

Definitsioon 6. Tähestiku Σ kõikide mittetühjade stringide hulka tähistatakse Σ^+ .

Definitsioon 7. Kui $L \subseteq \Sigma^*$, siis L on *keel* (ehk *formaalne keel*) tähestikus Σ .

Kuna keeled on hulgad, siis on defineeritud kahe keele ühend, ühisosa ja hulgateoreetilise vahe (kasutame tähistusi $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 - L_2 = \{w \in L_1 \mid w \notin L_2\}$).

Definitsioon 8. Olgu $L \subseteq \Sigma^*$. Siis keelt $\Sigma^* - L$ nimetatakse keele L *täiendiks* (*complement*) tähestiku Σ suhtes. Kui on selge, millist tähestikku vaadeldakse, siis öeldakse lihtsalt, et $\Sigma^* - L$ on keele L täiend.

Definitsioon 9. Kui x ja y on stringid tähestikus Σ , siis stringi xy (mis on saadud antud stringide järjest kirjutamisel) nimetatakse stringide x ja y *konkatenatsiooniks* (*korrutiseks*). Mõnikord on stringide x ja y konkatenatsiooni tähistuseks $x \cdot y$.

Definitsioon 10. Kui x on string ja $n \in \mathbb{N}$, siis x^n tähistab stringi $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ korda}}$. Seejuures $x^0 \Leftarrow \varepsilon$ (märki $\Leftarrow$ loetakse „võrdub definitsiooni põhjal“).

Definitsioon 11. Stringi w *pikkus* $|w|$ on sümbolite arv stringis w .

Definitsioon 12. Sümboli a esinemiste arvu stringis w tähistatakse $|w|_a$.

Definitsioon 13. Kui $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, siis $L_1 \cdot L_2 \Leftarrow \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\}$. Keelt $L_1 \cdot L_2$ nimetatakse keelte L_1 ja L_2 *konkatenatsiooniks*.

Definitsioon 14. Olgu $L \subseteq \Sigma^*$. Siis

$$L^0 \Leftarrow \{\varepsilon\},$$

$$L^n \Leftarrow \underbrace{L \cdot \dots \cdot L}_n, \text{ kui } n > 0.$$

Definitsioon 15. Keele L iteratsiooniks (*Kleene'i katteks*, *Kleene closure*, *Kleene star*, *star operation*) nimetatakse keelt $L^* \Leftarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$.

Definitsioon 16. Stringi w peegelpildiks (*reversal*) (tähistus w^R) nimetatakse stringi, mis on saadud stringist w sümbolite järjekorra vastupidiseks muutmise teel.

Definitsioon 17. Kui $L \subseteq \Sigma^*$, siis $L^R \Leftarrow \{w^R \mid w \in L\}$.

Definitsioon 18. String x on stringi y prefiks (tähistame $x \sqsubset y$), kui leidub string u , mille korral $y = xu$.

Definitsioon 19. String x on stringi y sufiks (tähistame $x \sqsupset y$), kui leidub string u , mille korral $y = ux$.

Definitsioon 20. Generatiivne grammatika (*0-tüüpi grammatika* ehk lihtsalt *grammatika*, *generative grammar*, *rewrite grammar*) on nelik $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$, kus N ja Σ on lõplikud hulgad, $N \cap \Sigma = \emptyset$, $P \subset (N \cup \Sigma)^+ \times (N \cup \Sigma)^*$, P on lõplik ja $S \in N$. Siin Σ on *terminalide tähestik*, N on *mitteterminalide tähestik*, mille elemente nimetatakse ka *muutujateks* (*nonterminal*, *variable*), S on *lähtesümbol* (ehk *stardisümbol*). Stringipaare $(\alpha, \beta) \in P$ nimetatakse *tuletusreegliteks* (*produktsoonireegliteks*, *produktsoonideks*) ja kirjutatakse kujul $\alpha \rightarrow \beta$.

Definitsioon 21. Olgu antud grammatika G . Kirjutame $\phi \Rightarrow_G \psi$ (või lihtsalt $\phi \Rightarrow \psi$), kui leiduvad stringid $\alpha, \beta, \eta, \theta$ tähestikus $N \cup \Sigma$, mille korral $\phi = \eta\alpha\theta$, $\psi = \eta\beta\theta$ ja $(\alpha \rightarrow \beta) \in P$. Kui $\phi \Rightarrow_G \psi$, siis öeldakse, et string ψ on *otseselt tuletatud* sõnast ϕ .

Definitsioon 22. Kui $\omega_0 \Rightarrow \omega_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \omega_n$, kus $n \geq 0$, siis kirjutatakse $\omega_0 \xRightarrow{*} \omega_n$ ja öeldakse, et string ω_n on *tuletatav* stringist ω_0 . Teisiti öeldes seos $\xRightarrow{*}$ on hulgal $(N \cup \Sigma)^*$ defineeritud seose $\Rightarrow$ refleksiivne transitiivne kate.

Seejuures stringide jada $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ nimetatakse stringi ω_n *tuletuseks* (ehk *derivatsiooniks*, *derivation*) stringist ω_0 grammatikas G . Arvu n nimetatakse selle tuletuse *pikkuseks*. (ehk *sammude arvuks*).

Definitsioon 23. Grammatika G poolt genereeritav keel on

$$L(G) \Leftarrow \{\omega \in \Sigma^* \mid S \xRightarrow{*}_G \omega\}.$$

Definitsioon 24. Grammatikad G_1 ja G_2 on *ekvivalentsed*, kui $L(G_1) = L(G_2)$.

Definitsioon 25. Kontekstitundlik grammatika (*1-tüüpi grammatika*, *kontekstist sõltuv grammatika*, *context-sensitive grammar*, *phrase-structure grammar*) on grammatika, mille iga tuletusreegel on kujul $\xi A \zeta \rightarrow \xi \alpha \zeta$, kus $A \in N$, $\xi \in (N \cup \Sigma)^*$, $\zeta \in (N \cup \Sigma)^*$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^+$.

Definitsioon 26. *Kontekstivaba grammatika (2-tüüpi grammatika, context-free grammar)* on grammatika, mille iga tuletusreegel on kujul $A \rightarrow \alpha$, kus $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$.

Definitsioon 27. *Lineaarne grammatika (linear grammar)* on grammatika, mille iga tuletusreegel on kujul $A \rightarrow u$ või $A \rightarrow uBv$, kus $A \in N$, $u \in \Sigma^*$, $v \in \Sigma^*$, $B \in N$.

Definitsioon 28. *Paremlineaarne grammatika (3-tüüpi grammatika, right-linear grammar)* on grammatika, mille iga tuletusreegel on kujul $A \rightarrow u$ või $A \rightarrow uB$, kus $A \in N$, $u \in \Sigma^*$, $B \in N$.

Definitsioon 29. Tuletusreeglit kujul $\alpha \rightarrow \varepsilon$ nimetatakse ε -tuletusreegliks.

Lemma 30. *Iga paremlineaarne grammatika on lineaarne. Iga lineaarne grammatika on kontekstivaba. Iga ε -tuletusreegliteta kontekstivaba grammatika on kontekstitundlik.*

Definitsioon 31. 0-tüüpi, 1-tüüpi, 2-tüüpi ja 3-tüüpi grammatikad moodustavad Chomsky hierarhia (Chomsky hierarchy).

Definitsioon 32. Keelt nimetatakse *0-tüüpi keeleks* (kontekstitundlikuks, kontekstivabaks, lineaarseks, paremlineaarseks), kui seda keelt saab genereerida 0-tüüpi (vastavalt kontekstitundliku, kontekstivaba, lineaarse, paremlineaarse) grammatikaga.

Teoreem 33. *Kontekstitundlike keelte klass on kinnine ühendi, ühisosa ja täiendi suhtes.*

Definitsioon 34. *Lõplik automaat (finite automaton, finite-state machine)* on viisik $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, I, F \rangle$, kus Σ on lõplik sisendtähestik, Q ja Δ on lõplikud hulgad, $\Delta \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$, $I \subseteq Q$, $F \subseteq Q$. Hulga Q elemente nimetatakse *olekuteks* (state), hulga I elemente nimetatakse *algolekuteks* (läheteolekuteks, initial state), hulga F elemente nimetatakse *lõppolekuteks* (final state, accepting state). Kui $\langle p, x, q \rangle \in \Delta$, siis kolmikut $\langle p, x, q \rangle$ nimetatakse *üleminekuks* (transition) olekust p olekusse q ja string x on selle ülemineku *märgend* (label).

Definitsioon 35. Lõpliku automaadi $\langle Q, \Sigma, \Delta, I, F \rangle$ konfiguratsiooniks nimetatakse järjestatud paari $\langle q, w \rangle$, kus $q \in Q$ ja $w \in \Sigma^*$.

Definitsioon 36. Lõpliku automaadi $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, I, F \rangle$ konfiguratsioonide hulgal defineerime binaarse seose $\vdash_M$ (ehk lihtsalt $\vdash$) järgnevalt. Kui $\langle p, x, q \rangle \in \Delta$ ja $w \in \Sigma^*$, siis $\langle p, xw \rangle \vdash_M \langle q, w \rangle$. Seost $\vdash$ nimetatakse automaadi *töötaktiks* või *sammuks* (step). Binaarne seos $\vdash^*$ on seose $\vdash$ refleksiivne transitiivne kate.

Definitsioon 37. Lõplik automaat $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, I, F \rangle$ *aktsepteerib* (accepts, recognizes) stringi $w \in \Sigma^*$ parajasti siis, kui leiduvad olekud $p \in I$ ja $q \in F$, mille korral $\langle p, w \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon \rangle$.

Definitsioon 38. Lõpliku automaadi M poolt *aktsepteeritav* keel $L(M)$ koosneb selle automaadi poolt aktsepteeritavatest stringidest.

Definitsioon 39. Lõplikud automaadid M_1 ja M_2 on *ekvivalentsed*, kui $L(M_1) = L(M_2)$.

Lemma 40. Iga lõpliku automaadi jaoks leidub ekvivalentne ühe algolekuga lõplik automaat, kus iga ülemineku märgendi pikkus on 1.

Teoreem 41. Keel on paremlineaarne parajasti siis, kui leidub lõplik automaat, mis seda keelt aktsepteerib.

Definitsioon 42. Lõplik automaat $\langle Q, \Sigma, \Delta, I, F \rangle$ on *determineeritud* (deterministlik, deterministic), kui

- 1) hulgas I on täpselt üks element;
- 2) iga ülemineku $\langle p, x, q \rangle \in \Delta$ jaoks kehtib võrdus $|x| = 1$;
- 3) iga sümboli $a \in \Sigma$ ja iga oleku $p \in Q$ jaoks leidub täpselt üks olek $q \in Q$, mille korral $\langle p, a, q \rangle \in \Delta$.

Teoreem 43. Iga lõpliku automaadi jaoks leidub ekvivalentne determineeritud lõplik automaat.

Teoreem 44. Lõplike automaatide poolt aktsepteeritavate keelte klass on kinnine iteratsiooni, konkatenatsiooni ja ühendi suhtes.

Teoreem 45. Lõplike automaatide poolt aktsepteeritavate keelte klass on kinnine täiendi ja ühisosa suhtes.

Lemma 46 (pumpamislemma, kasvatamise lemma, pumping lemma). Olgu L lõpliku automaadi poolt aktsepteeritav keel tähestikus Σ . Siis leidub selline positiivne täisarv p , et iga stringi $w \in L$ korral, kui $|w| \geq p$, siis leiduvad sellised stringid $x, y, z \in \Sigma^*$, et $xyz = w$, $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq p$ ja $xy^iz \in L$ iga $i \geq 0$ korral.

Definitsioon 47. Regulaaravaldis (regular expression) üle tähestiku Σ defineeritakse rekursiivselt: 0 on regulaaravaldis; 1 on regulaaravaldis; kui $a \in \Sigma$, siis a on regulaaravaldis; kui e ja f on regulaaravaldised, siis ka $(e+f)$, $(e \cdot f)$ ja e^* on regulaaravaldised.

Kõige tugevamalt seob tehe $*$, järgneb korrumamine, kõige nõrgemalt seob liitmine. Tavaliselt kirjutatakse $e \cdot f$ asemel lihtsalt ef .

Definitsioon 48. Iga regulaaravaldis e esitab (denotes, represents) teatud keele (tähistus $L(e)$), mis defineeritakse rekursiivselt:

$$\begin{aligned} L(a) &\Leftarrow \{a\}, \text{ kui } a \in \Sigma, \\ L(0) &\Leftarrow \emptyset, \\ L(1) &\Leftarrow \{\varepsilon\}, \\ L(e+f) &\Leftarrow L(e) \cup L(f), \\ L(e \cdot f) &\Leftarrow L(e) \cdot L(f), \\ L(e^*) &\Leftarrow L(e)^*. \end{aligned}$$

Tavaliselt kirjutatakse $L(e)$ asemel lihtsalt e .

Definitsioon 49. Keel on *regulaarne*, kui leidub seda keelt esitav regulaaravaldis.

Definitsioon 50. Kui e on regulaaravaldis, siis $e^+ \Leftarrow e^*e$.

Teoreem 51 (Kleene'i teoreem). *Keel on regulaarne parajasti siis, kui leidub lõplik automaat, mis seda keelt aktsepteerib.*

Definitsioon 52. Tuletust kontekstivabas grammatikas nimetatakse *vasaktuletuseks* (leftmost derivation), kui tuletuse igal sammul asendatakse vasakpõlsem mitteterminal (see tähendab, et iga samm on esitatav kujul $uA\theta \Rightarrow u\beta\theta$, kus $(A \rightarrow \beta) \in P$, $u \in \Sigma^*$ ja $\theta \in (N \cup \Sigma)^*$).

Definitsioon 53. Kontekstivaba grammatika on *mitmene* (ambiguous), kui leidub string, millel on vähemalt kaks vasaktuletust. Vastasel korral on kontekstivaba grammatika *ühene* (unambiguous).

Definitsioon 54. *Dyck'i keel* üle $2n$ sümboli on kontekstivaba grammatika

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \varepsilon, \\ S &\rightarrow a_1 S b_1 S, \\ &\vdots \\ S &\rightarrow a_n S b_n S \end{aligned}$$

poolt genereeritav keel tähestikus $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n\}$.

Teoreem 55. *String w tähestikus $\{a, b\}$ on grammatikas*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \varepsilon, \\ S &\rightarrow a S b S \end{aligned}$$

tuletatav parajasti siis, kui $|w|_a = |w|_b$ ja $\forall x \sqsubset w (|x|_a \geq |x|_b)$.

Definitsioon 56. *Lukasiewicz'i keel* üle $n + 1$ sümboli on kontekstivaba grammatika

$$\begin{aligned} S &\rightarrow a_0, \\ S &\rightarrow a_1 S, \\ S &\rightarrow a_2 S S, \\ &\vdots \\ S &\rightarrow a_n S^n \end{aligned}$$

poolt genereeritav keel tähestikus $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$.

Teoreem 57. *String w tähestikus $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ kuulub Lukasiewicz'i keelde üle $n + 1$ sümboli parajasti siis, kui $\sum_{i=0}^n (i - 1)|w|_{a_i} = -1$ ja $\forall x \sqsubset w (\sum_{i=0}^n (i - 1)|x|_{a_i} \geq 0)$. (Siin $x \sqsubset w$ tähendab, et $x \sqsubset w$ ja $x \neq w$.)*

Teoreem 58. *Kui keel L on kontekstivaba, siis leidub ε -tuletusreegilteta kontekstivaba grammatika, mis genereerib keele $L - \{\varepsilon\}$.*

Definitsioon 59. Kontekstivaba grammatika $\langle N, \Sigma, P, S \rangle$ on *Chomsky normaalkujul* (grammar in Chomsky normal form), kui iga tuletusreegel on ühel järgmistest kujudest: $S \rightarrow \varepsilon$, $A \rightarrow a$, $A \rightarrow BC$, kus $A \in N$, $B \in N - \{S\}$, $C \in N - \{S\}$, $a \in \Sigma$.

Teoreem 60. Iga kontekstivaba grammatika jaoks leidub ekvivalentne kontekstivaba grammatika Chomsky normaalkujul.

Lemma 61 (pumpamislemma, kasvatamise lemma, pumping lemma). Olgu L kontekstivaba keel tähestikus Σ . Siis leidub selline positiivne täisarv p , et iga stringi $w \in L$ jaoks, kui $|w| \geq p$, siis leiduvad sellised stringid $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$, et $uvxyz = w$, $vy \neq \varepsilon$, $|vxy| \leq p$ ja $uv^i xy^i z \in L$ iga $i \geq 0$ korral.

Teoreem 62. Kui $|\Sigma| = 1$ ja keel $L \subseteq \Sigma^*$ on kontekstivaba, siis L on regulaarne keel.

Teoreem 63. Kontekstivabade keelte klass on kinnine ühendi, konkatenatsiooni ja iteratsiooni suhtes.

Teoreem 64. Leiduvad kontekstivabad keeled L_1 ja L_2 , mille korral $L_1 \cap L_2$ ei ole kontekstivaba.

Teoreem 65. Leidub kontekstivaba keel $L \subseteq \Sigma^*$, mille korral $\Sigma^* - L$ ei ole kontekstivaba.

Teoreem 66. Kui keel L_1 on kontekstivaba ja keel L_2 on regulaarne, siis keel $L_1 \cap L_2$ on kontekstivaba.

Definitsioon 67. Magasinmäluga automaat (magasiniga automaat, pinuautomaat, pushdown automaton) on kuuk $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, I, F \rangle$, kus Q , Σ , Δ ja Γ on lõplikud hulgad, $I \subseteq Q$, $F \subseteq Q$ ja

$$\Delta \subseteq (Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Q \times \Gamma^*).$$

Hulga Q elemente nimetatakse *olekuteks*, hulga I elemente nimetatakse *algolekuteks*, hulga F elemente nimetatakse *lõppolekuteks*, Σ on *sisendtähestik*, Γ on *magasinitähestik* (stack alphabet) ja Δ on *üleminekute hulk* (transition relation).

Definitsioon 68. Magasinmäluga automaadi $\langle Q, \Sigma, \Delta, I, F \rangle$ konfiguratsiooniks nimetatakse kolmikut $\langle q, w, \alpha \rangle$, kus $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$, $\alpha \in \Gamma^*$.

Definitsioon 69. Magasinmäluga automaadi $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, I, F \rangle$ konfiguratsioonide hulgal defineerime binaarse seose $\vdash_M$ (ehk lihtsalt $\vdash$) järgnevalt. Kui $\langle \langle p, x, \beta \rangle, \langle q, \gamma \rangle \rangle \in \Delta$, $w \in \Sigma^*$ ja $\alpha \in \Gamma^*$, siis $\langle p, xw, \beta\alpha \rangle \vdash_M \langle q, w, \gamma\alpha \rangle$. Binaarne seos $\vdash^*$ on seose $\vdash$ refleksiivne transitiivne kate.

Definitsioon 70. Magasinmäluga automaat $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, I, F \rangle$ aktsepteerib stringi $w \in \Sigma^*$ parajasti siis, kui leiduvad olekud $p \in I$ ja $q \in F$, mille korral $\langle p, w, \varepsilon \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle$.

Definitsioon 71. Magasinmäluga automaadi M poolt aktsepteeritav keel $L(M)$ koosneb selle automaadi poolt aktsepteeritavatest stringidest.

Teoreem 72. Kui keel on kontekstivaba, siis leidub seda keelt aktsepteeriv magasinmäluga automaat.

Teoreem 73. Iga magasinmäluga automaadi jaoks leidub sama keelt genereeriv kontekstivaba grammatika.

Definitsioon 74. Magasinmäluga automaadi üleminekuid $\langle\langle p_1, x_1, \beta_1 \rangle, \langle q_1, \gamma_1 \rangle\rangle$ ja $\langle\langle p_2, x_2, \beta_2 \rangle, \langle q_2, \gamma_2 \rangle\rangle$ nimetatakse *konfliktseteks*, kui

- 1) $p_1 = p_2$;
- 2) $x_1 \sqsubset x_2$ või $x_2 \sqsubset x_1$;
- 3) $\beta_1 \sqsubset \beta_2$ või $\beta_2 \sqsubset \beta_1$.

Definitsioon 75. Magasinmäluga automaat on *determineeritud* (deterministic), kui algolekuid on täpselt üks ja kõik üleminekud on omavahel mittekonfliktsetes.

Definitsioon 76. Keel L tähestikus Σ on *determineeritud kontekstivaba keel*, kui leidub determineeritud magasinmäluga automaat, mis aktsepteerib keele $L \cdot \{\$$ tähestikus $\Sigma \cup \{\$$, kus $\$$ on uus sümbol, mis ei kuulu tähestikku Σ . Sümbolit $\$$ nimetatakse *stringi lõpu markeriks*.

Teoreem 77. Iga regulaarne keel on determineeritud kontekstivaba keel.

Teoreem 78. Iga determineeritud kontekstivaba keele jaoks leidub seda keelt genereeriv ühene kontekstivaba grammatika.

Teoreem 79. Iga determineeritud kontekstivaba keele täiend on determineeritud kontekstivaba keel.

Teoreem 80. Leiduvad determineeritud kontekstivabad keeled L_1 ja L_2 , mille korral $L_1 \cap L_2$ ei ole determineeritud kontekstivaba keel.

Teoreem 81. Leiduvad determineeritud kontekstivabad keeled L_1 ja L_2 , mille korral $L_1 \cup L_2$ ei ole determineeritud kontekstivaba keel.

Teoreem 82. Keel on rekursiivselt loenduv parajasti siis, kui leidub seda keelt genereeriv 0-tüüpi grammatika.

Definitsioon 83. Posti vastavuse süsteem tähestikus Σ on stringide korteežide paar $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$, kus iga i korral $x_i \in \Sigma^*$ ja $y_i \in \Sigma^*$.

Märkus 84. Posti vastavuse süsteemi $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$ kujutatakse tavaliselt nii:

$$\left[\frac{x_1}{y_1} \right], \dots, \left[\frac{x_n}{y_n} \right].$$

Definitsioon 85. Posti vastavuse süsteemi $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$ lahendus (match) on mittetühi indekse jada $(i_1, \dots, i_k)$, mille korral

$$x_{i_1} \dots x_{i_k} = y_{i_1} \dots y_{i_k}$$

(siin iga j korral kehtib $1 \leq i_j \leq n$).

Teoreem 86. Vaatleme Posti vastavuse süsteeme tähestikus Σ , kus $|\Sigma| \geq 2$. Pole olemas algoritmi, mis iga sellise Posti vastavuse süsteemi kohta teeks kindlaks, kas süsteemil lahendus on.

Teoreem 87. On olemas algoritm, mis iga kontekstitundliku grammatika ja iga stringi kohta teeb kindlaks, kas antud string kuulub antud grammatika poolt genereeritavasse keelde.

Teoreem 88. On olemas algoritm, mis iga kontekstivaba grammatika ja iga stringi kohta teeb kindlaks, kas antud string kuulub antud grammatika poolt genereeritavasse keelde.

Teoreem 89. On olemas algoritm, mis iga kontekstivaba grammatika G kohta teeb kindlaks, kas $L(G) \neq \emptyset$.

Teoreem 90. On olemas algoritm, mis iga kontekstivaba grammatika G kohta teeb kindlaks, kas keel $L(G)$ on lõpmatu.

Teoreem 91. On olemas algoritm, mis suvaliste paremlineaarsete grammatikate G_1 ja G_2 kohta teeb kindlaks, kas $L(G_1) \subseteq L(G_2)$.

Teoreem 92. On olemas algoritm, mis suvaliste paremlineaarsete grammatikate G_1 ja G_2 kohta teeb kindlaks, kas $L(G_1) = L(G_2)$. Seega paremlineaarsete grammatikate ekvivalentsiprobleem on algoritmiliselt lahenduv.

Teoreem 93. Iteratsioonita regulaaravaldiste mittevõrdsuse probleem on NP-täielik.

Teoreem 94. Olgu $|\Sigma| \geq 2$. Siis pole olemas algoritmi, mis suvaliste tähestikus Σ toimivate kontekstivabade grammatikate G_1 ja G_2 kohta teeks kindlaks, kas $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$.

Teoreem 95. Olgu $|\Sigma| \geq 2$. Siis pole olemas algoritmi, mis suvaliste tähestikus Σ toimivate kontekstivabade grammatikate G_1 ja G_2 kohta teeks kindlaks, kas keel $L(G_1) \cap L(G_2)$ on lõpmatu.

Teoreem 96. Olgu $|\Sigma| \geq 2$. Siis pole olemas algoritmi, mis suvalise tähestikus Σ toimiva kontekstivaba grammatika G kohta teeks kindlaks, kas G on ühene.

Teoreem 97. Olgu $|\Sigma| \geq 2$. Siis pole olemas algoritmi, mis suvalise tähestikus Σ toimiva kontekstivaba grammatika G kohta teeks kindlaks, kas $L(G) = \Sigma^*$.

Teoreem 98. Olgu $|\Sigma| \geq 2$. Tähestikus Σ toimivate kontekstivabade grammatikate ekvivalentsiprobleem pole algoritmiliselt lahenduv.

Teoreem 99. Olgu $|\Sigma| \geq 2$. Siis pole olemas algoritmi, mis suvaliste tähestikus Σ toimivate kontekstivabade grammatikate G_1 ja G_2 kohta teeks kindlaks, kas $L(G_1) \subseteq L(G_2)$.

Teoreem 100. Olgu $|\Sigma| \geq 2$. Siis pole olemas algoritmi, mis suvalise tähestikus Σ toimiva kontekstivaba grammatika G kohta teeks kindlaks, kas $\Sigma^* - L(G)$ on lõpmatu.

Teoreem 101. Olgu $|\Sigma| \geq 2$. Siis pole olemas algoritmi, mis suvalise tähestikus Σ toimiva kontekstivaba grammatika G kohta teeks kindlaks, kas keel $L(G)$ on regulaarne.

Teoreem 102. Olgu $|\Sigma| \geq 2$. Siis pole olemas algoritmi, mis suvaliste tähestikus Σ toimivate kontekstivabade grammatikate G_1 ja G_2 kohta teeks kindlaks, kas keel $L(G_1) \cap L(G_2)$ on kontekstivaba.

Teoreem 103. Olgu $|\Sigma| \geq 2$. Siis pole olemas algoritmi, mis suvalise tähestikus Σ toimiva kontekstivaba grammatika G kohta teeks kindlaks, kas keel $\Sigma^* - L(G)$ on kontekstivaba.

Teoreem 104. Olgu $|\Sigma| \geq 2$. Siis pole olemas algoritmi, mis suvalise tähestikus Σ toimiva kontekstitundliku grammatika G kohta teeks kindlaks, kas keel $L(G)$ on kontekstivaba.