

KATEGOORIEOORIA

Kevad 2016

Loengukonspekt

Lektor: Valdis Laan

1. Kategooriad

1.1. Hulgateoreetilistest alustest

On hästi teada, et kõigi hulkade hulka ei ole olemas. Samas kategooriateoorias sooviks me käsitleda kõigi hulkade, kõigi rühmade, kõigi topoloogiliste ruumide ja teiste matemaatiliste objektide kogumeid. Et sellest probleemist üle saada, vaatleme lisaks hulkadele veel kogumeid, mida kutsume **klassideks**. Iga hulk on klass, kuid mitte vastupidi. Hulga on klassid, mis kuuluvad mõnda klassi. Klasse, mis ei ole hulga, nimetatakse pärisklassideks. Iga omaduse P jaoks on olemas kõigi selliste hulkade klass, millel on omadus P . Muuhulgas on olemas kõigi hulkade klass, kõigi rühmade klass jne. Antud klasside jaoks saab moodustada nende ühisosa, ühendi ja otsekorrutise, samuti võib vaadelda kujutusi klasside vahel, ekvivalentsiseoseid klassidel jne.

1.2. Kategooria definitsioon

Definitsioon 1.1. Kategooria $\mathcal{C}$ koosneb järgmistest asjadest:

1. klass $\mathcal{C}_0$, mille elemente kutsume selle kategooria **objektideks**;
2. iga objektipaari (A, B) jaoks on olemas hulk $\mathcal{C}(A, B)$, mille elemente nimetame **morfismideks** objektist A objekti B ;
3. iga objektikolmiku (A, B, C) jaoks on olemas kujutus (**komponeerimine** ehk **korrutamine**)

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \longrightarrow \mathcal{C}(A, C);$$

paari (f, g) kujutist (morfismide f ja g **kompositsiooni** ehk **korrutist**) tähistame $g \circ f$ või lühidalt gf ;

4. iga objekti A jaoks on olemas morfism $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$, mida kutsutakse objekti A **ühikmorfismiks**.

Need andmed peavad rahuldama järgmisi aksioome.

1. Kui $(A, B) \neq (A', B')$, siis $\mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(A', B') = \emptyset$.
2. **Assotsiatiivsuse aksioom:** mistahes morfismide $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$, $h \in \mathcal{C}(C, D)$ korral kehtib võrdus

$$h(gf) = (hg)f.$$

3. **Ühiku aksioom:** mistahes morfismide $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$ korral kehtivad võrdused $1_B f = f$ ja $g 1_A = g$.

Morfismi $f \in \mathcal{C}(A, B)$ jaoks kasutatakse tihti tähistusi $f : A \rightarrow B$ ja $A \xrightarrow{f} B$; üheselt määratud objekti A kutsutakse morfismi f **lähteobjektiks** ehk doomeniks (tähistus: $\text{dom } f$) ning objekti B kutsutakse f **sihtobjektiks** ehk kodoomeniks (tähistus: $\text{cod } f$). Morfismi $f : A \rightarrow A$ nimetatakse objekti A **endomorfismiks** ja hulka $\text{End}(A) = \mathcal{C}(A, A)$ nimetatakse objekti A endomorfismide hulgaks. On selge, et $(\text{End}(A), \circ)$ on monoid. Kategooria $\mathcal{C}$ objektide klassi tähistatakse ka $\text{Ob}(\mathcal{C})$ või $|\mathcal{C}|$, morfismide klassi aga $\text{Mor}(\mathcal{C})$ või $\mathcal{C}_1$. Morfismide hulka objektist A objekti B tähistatakse veel ka sümboliga $\text{Mor}(A, B)$ või $\text{hom}(A, B)$.

Märkused 1.2. 1. Osutub, et 1_A on objekti A ainus ühikmorfism, sest kui $i_A \in \mathcal{C}(A, A)$ on veel mingi morfism, mis rahuldab ühiku aksioomi, siis $1_A = 1_A i_A = i_A$.

2. Samamoodi nagu poolrühmade korral järeldub assotsiatiivsuse aksioomist, et lõpliku arvu morfismide komponeerimisel võib sulge paigutada mistahes (mõttekal) viisil ja seega võib nad üldse ära jätta.

Definitsioon 1.3. Kategooria on **väike** kui tema objektide klass on hulk, vastasel korral kutsutakse kategooriat **suureks**.

Näide 1.4. Paljud matemaatilised struktuurid ja nende vahel vaadeldavad kujutused või homomorfismid moodustavad kategooria. Järgnevas tabelis on toodud mõned selliste kategooriate näited.

Tähis	objektid	morfismid
Set	hulgad	kujutused
Rel	hulgad	binaarsed seosed hulkade vahel
Mon	monoidid	monoidide homomorfismid
Gr	rühmad	rühmade homomorfismid
Ab	Abeli rühmad	rühmade homomorfismid
Rng	ühikelemendiga assotsiatiivsed ringid	ringide homomorfismid
$\text{Vec}_{\mathbb{R}}$	vektorruumid üle reaalarvude	lineaarkujutused
Mod_R	parempoolsed moodulid üle ringi R	moodulite homomorfismid
Ban_{∞}	Banachi ruumid üle reaalarvude	tõkestatud lineaarkujutused
Ban_1	Banachi ruumid üle reaalarvude	ahendavad lineaarkujutused
Top	topoloogilised ruumid	pidevad kujutused
Pos	järjestatud hulgad	järjestust säilitavad kujutused
Lat	võred	võrede homomorfismid
Graph	graafid	graafide homomorfismid
Sgraph	graafid	tugevad graafide homomorfismid
0	ei ole	ei ole
1	A	1_A
2	A, B	$A \rightarrow B, 1_A, 1_B$

Tähis	objektid	morfismid
Set	hulgad	kujutused
Rel	hulgad	binaarsed seosed hulkade vahel
Mon	monoidid	monoidide homomorfismid
Gr	rühmad	rühmade homomorfismid
Ab	Abeli rühmad	rühmade homomorfismid
Rng	ühikelemendiga assotsiatiivsed ringid	ringide homomorfismid
$\text{Vec}_{\mathbb{R}}$	vektorruumid üle reaalarvude	lineaarkujutused
Mod_R	parempoolsed moodulid üle ringi R	moodulite homomorfismid
Ban_{∞}	Banachi ruumid üle reaalarvude	tõkestatud lineaarkujutused
Ban_1	Banachi ruumid üle reaalarvude	ahendavad lineaarkujutused
Top	topoloogilised ruumid	pidevad kujutused
Pos	järjestatud hulgad	järjestust säilitavad kujutused
Lat	võred	võrede homomorfismid
Graph	graafid	graafide homomorfismid
Sgraph	graafid	tugevad graafide homomorfismid
0	ei ole	ei ole
1	A	1_A
2	A, B	$A \rightarrow B, 1_A, 1_B$

Enamusel juhtudel on morfismide komponeerimiseks tavaline kujutuste komponeerimine (järjestrakendamine) ja ühikmorfismid on samasusteisendused. Kategoorias Rel on seoste kompositsiooniks nende korrutis ja ühikmorfism on võrdusseos. Kategooriat **0** nimetatakse **tühjaks kategooriaks**.

- Näide 1.5.** 1. Võib vaadelda kategooriat, kus objektid on naturaalarvud, morfismid m -st n -i on kõik maatriksid (üle fikseeritud korpuse), millel on m rida ja n veergu, morfismide komponeerimine on harilik maatriksite korrutamine ja ühikmorfismideks on vastavat järku ühikmaatriksid.
2. Järjestatud hulka (selle kursuse jooksul kutsume osaliselt järjestatud hulki lühidalt järjestatud hulkadeks) $(P, \leq)$ võib vaadelda kategooriana $\mathcal{P}$, mille objektide hulk on P . Kui $x, y \in P$, siis $\mathcal{P}(x, y)$ koosneb täpselt ühest morfismist, kui $x \leq y$, ning on tühi vastasel juhul. (Kategooria saamiseks piisab tegelikult sellest, et $\leq$ on eeljärjestus, s.t. refleksiivne ja transitiivne seos hulgal P .)
3. Iga hulka võib vaadelda kui **diskreetset kategooriat**, s.t. kui kategooriat, mille objektid on selle hulga elemendid ja ainsad morfismid on ühikmorfismid.
4. Iga monoid $(M, \cdot)$ tekitab kategooria $\mathcal{M}$, milles on üks objekt $*$, $\mathcal{M}_0 = \{*\}$, ja $\mathcal{M}(*, *) = M$; morfismide komponeerimine on monoidi M korrutamine $\cdot$ ja objekti $*$ ühikmorfism on monoidi ühikelement 1. Ka vastupidi: iga üheobjektilise kategooria kõigi morfismide hulk on monoid.

1.3. Funktsionaalsed programmeerimiskeeled kui kategooriad

Lisaks matemaatikale leiavad kategooriad rakendamist veel näiteks funktsionaalsete programmeerimiskeelte teoorias.

Puhtal funktsionaalsel programmeerimiskeelel on olemas:

- primitiivsed andmetüübid,
- iga tüüpi konstandid,
- operatsioonid, mis on kujutused andmetüüpide vahel,
- konstruktorid, mida kasutades saab olemasolevatest andmetüüpidest ja operatsioonidest tuletada uusi vaadeldava keele andmetüüpe ja operatsioone.

Selline keel ise on kõigi operatsioonide ja tüüpide hulk, mida saab konstruktorite abil tuletada primitiivsetest tüüpidest ja operatsioonidest.

Selleks, et funktsionaalset programmeerimiskeelt L saaks vaadelda kategooriana $\mathcal{C}(L)$, tuleb teha kaks eeldust ja üks väike muudatus.

- Eeldame, et iga tüüpi A (nii primitiivse kui tuletatud) jaoks leidub mitte millegi tegemise operatsioon 1_A . Selle rakendamisel ei tehta sisendandmetega mitte midagi, need väljastatakse muutmata kujul.
- Lisame keelele ühe tüüpi, mida tähistame sümboliga $\mathbf{1}$, millel on omadus, et igast tüübist A leidub üheselt määratud operatsioon tüüpi $\mathbf{1}$. Iga konstanti c tüübist A tõlgendame kui morfismi $c : \mathbf{1} \rightarrow A$.
- Eeldame, et keelel on olemas komponeerimiskonstruktor: kui f on operatsioon, mille sisendid on tüüpi A ja väljundid on tüüpi B , ning kui g on operatsioon sisenditega tüübist B ja väljunditega tüübist C , siis nende järjekorrad on tuletatud operatsioon ehk programm (tihti tähistatakse seda $f; g$), mille sisendtüüp on A ja väljundtüüp C .

Nendel eeldustel tekitab funktsionaalne programmeerimiskeel L kategooria $\mathcal{C}(L)$, kus

1. objektid on keele L tüübid,
2. morfismid on keele L operatsioonid (nii primitiivsed kui tuletatud),
3. morfismi lähte- ja sihtobjekt on vastava operatsiooni sisend- ja väljundtüüp,
4. morfismide komponeerimine on antud komponeerimiskonstruktori abil, kusjuures komponeeritavate järjekord vahetatakse ära, s.t. $g \circ f = f; g$,
5. ühikmorfismid on mitte millegi tegemise operatsioonid.

Näide 1.6. Vaatleme programmeerimiskeelt, milles on kolm andmetüüpi: NAT (naturaalarvud ja 0), BOOLEAN (tõene või väär) ja CHAR (sümbolid). Anname operatsioonide kirjelduse kategoorises stiilis.

- Tüübis NAT on konstant $0 : \mathbf{1} \rightarrow \text{NAT}$ ja operatsioon $\text{succ} : \text{NAT} \rightarrow \text{NAT}$.
- Leiduvad konstandid $\text{true}, \text{false} : \mathbf{1} \rightarrow \text{BOOLEAN}$ ja operatsioon $\neg : \text{BOOLEAN} \rightarrow \text{BOOLEAN}$, mis peavad rahuldama võrdusi $\neg \circ \text{true} = \text{false}$ ja $\neg \circ \text{false} = \text{true}$.
- Tüübis CHAR on üks konstant $c : \mathbf{1} \rightarrow \text{CHAR}$ iga sümboli c jaoks.
- On kaks tüübiteisendusoperatsiooni $\text{ord} : \text{CHAR} \rightarrow \text{NAT}$ ja $\text{chr} : \text{NAT} \rightarrow \text{CHAR}$. Need rahuldavad võrdust $\text{chr} \circ \text{ord} = 1_{\text{CHAR}}$. (Et chr oleks defineeritud kõigil naturaalarvudel, võib lugeda, et ta tegutseb mooduli n järgi, kus n on sümbolite arv.)

Näiteprogrammiks on morfism next , mis on defineeritud kui kompositsioon $\text{chr} \circ \text{succ} \circ \text{ord} : \text{CHAR} \rightarrow \text{CHAR}$ ja mis leiab antud sümbolile koodi järgi järgneva sümboli. Märgime, et kaks morfismi (programmi) samastatakse kategoorias $\mathcal{C}(L)$, kui nad peavad defineerivate võrduste tõttu samad olema. Näiteks morfismid $\text{chr} \circ \text{succ} \circ \text{ord}$ ja $\text{chr} \circ \text{succ} \circ \text{ord} \circ \text{chr} \circ \text{ord}$ on samad.

Paneme veel tähele, et tüübis NAT on olemas konstandid $\text{succ} \circ \dots \circ \text{succ} \circ 0 : \mathbf{1} \rightarrow \text{NAT}$, kus succ esineb null või rohkem korda.

1.4. Mõned konstruktsioonid

Olemasolevatest kategooriatest saab teatud konstruktsioonide abil luua uusi.

Definitsioon 1.7. Kategooria $\mathcal{A}$ alamkategooria koosneb

1. kategooria $\mathcal{A}$ objektide klassi $\mathcal{A}_0$ alamklassist $\mathcal{B}_0$;
2. iga objektipaari $(B, B') \in \mathcal{B}_0^2$ jaoks leiduvast hulgast $\mathcal{B}(B, B') \subseteq \mathcal{A}(B, B')$, nii et
 - (a) kui $f \in \mathcal{B}(B, B')$ ja $g \in \mathcal{B}(B', B'')$, siis $gf \in \mathcal{B}(B, B'')$,
 - (b) $1_B \in \mathcal{B}(B, B)$ iga $B \in \mathcal{B}_0$ korral.

Definitsioon 1.8. Kategooria $\mathcal{A}$ alamkategooriat $\mathcal{B}$ nimetatakse **täielikuks alamkategooriaks**, kui

$$B, B' \in \mathcal{B}_0 \implies \mathcal{B}(B, B') = \mathcal{A}(B, B'),$$

s.t. $\mathcal{B}$ sisaldab koos iga kahe objektiga kõik nende objektide vahel kategoorias $\mathcal{A}$ leiduvad morfismid.

Näide 1.9. Kategooria $\mathbf{Ab}$ on kategooria $\mathbf{Gr}$ täielik alamkategooria, $\mathbf{Gr}$ on $\mathbf{Mon}$ täielik alamkategooria, $\mathbf{Mon}$ on poolrühmade kategooria $\mathbf{Sgr}$ alamkategooria, mis ei ole täielik. Kategooria $\mathbf{Ban}_\infty$ on $\mathbf{Vec}_\mathbb{R}$ alamkategooria, kuid mitte täielik alamkategooria.

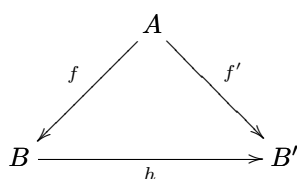
Definitsioon 1.10. Kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ **korrutis** on kategooria $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, mis on defineeritud järgmiselt.

1. $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})_0 = \mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_0$.
2. $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})((A, B), (A', B')) = \{(a, b) \mid a \in \mathcal{A}(A, A'), b \in \mathcal{B}(B, B')\}$.
3. Kategooria $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ morfismide komponeerimine on indutseeritud $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ komponeerimiste poolt, nimelt

$$(a', b')(a, b) = (a'a, b'b).$$

Definitsioon 1.11. Kui $A \in \mathcal{A}_0$ on kategooria $\mathcal{A}$ fikseeritud objekt, siis leidub **A -aluste objektide kategooria** $(A \downarrow \mathcal{A})$, mis on defineeritud järgmiselt.

1. Objektid on paarid (B, f) , kus $f : A \rightarrow B$.
2. Morfism $h : (B, f) \rightarrow (B', f')$ on $\mathcal{A}$ morfism $h : B \rightarrow B'$, mille korral $hf = f'$.
3. Komponeerimine kategoorias $(A \downarrow \mathcal{A})$ on indutseeritud $\mathcal{A}$ komponeerimise poolt.



Analoogiliselt võib konstrueerida A -üleste objektide kategooria $(\mathcal{A} \downarrow A)$.

Näide 1.12. Kui $(P, \leq)$ on järjestatud hulk, mida vaadeldakse kategooriana $\mathcal{P}$ (vt. näidet 1.5) ja $a \in P$, siis $(a \downarrow \mathcal{P})$ on kõigi elementide hulk, mis on a -st suuremad või a -ga võrdsed, s.t. elemendi a poolt tekitatud pääfilter.

Ülesanded 1.13. 1. Vali mingid objektid ja morfismid nende vahel nii, et nad moodustavad kategooria. Põhjenda, miks nad moodustavad kategooria. Edaspidises kutsume seda kategooriat “sinu lemmikkategooriaks”.

2. Too üks näide täielikust ja üks näide mittetäielikust alamkategooriast oma lemmikkategoorias.

2. Morfismide ja objektide liigid

2.1. Morfismide liigid

Nii nagu hulkade korral on tähtsal kohal üksühesed kujutused ja pealekujutused, nii ka kategooriates võib vaadelda teatud eriomadustega morfisme.

Definitsioon 2.1. Morfismi $f : A \rightarrow B$ kategoorias $\mathcal{C}$ nimetatakse

- **monomorfismiks**, kui ta on vasakult taandatav, s.t.

$$fg = fh \Rightarrow g = h$$

iga morfismide paari $g, h : C \rightarrow A$ korral;

- **koretraktsiooniks** (või lõikeks), kui ta on vasakult pööratav, s.t. leidub selline morfirm $g : B \rightarrow A$, et $gf = 1_A$. Sellisel juhul nimetatakse objekti A objekti B **retraktiks**.

Lause 2.2. Kategoorias $\mathcal{C}$

1. iga koretraktsioon on monomorfism;
2. iga ühikmorfism on koretraktsioon;
3. kahe monomorfismi (koretraktsiooni) korrutis on monomorfism (koretraktsioon);
4. kui kahe morfismi korrutis kf monomorfism (koretraktsioon), siis f on monomorfism (koretraktsioon).

Tõestus. 1. Oletame, et $kf = 1_A$ ja $fg = fh$ kus $f : A \rightarrow B$, $k : B \rightarrow A$ ja $g, h : C \rightarrow A$. Siis

$$g = 1_A g = (kf)g = k(fg) = k(fh) = (kf)h = 1_A h = h.$$

2. Iga $A \in \mathcal{C}_0$ korral $1_A = 1_A 1_A$.

3. Oletame, et $k : B \rightarrow D$ ja $f : A \rightarrow B$ on monomorfismid ja $(kf)g = (kf)h$, kus $g, h : C \rightarrow A$.

$$C \xrightarrow[h]{g} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{k} D$$

Siis $k(fg) = k(fh)$ ja seega $fg = fh$, sest k on monomorfism. Kuna f on monomorfism, siis viimasest võrdusest järeldub $g = h$. Sellega oleme näidanud, et kf on monomorfism.

Kui $k : B \rightarrow D$ ja $f : A \rightarrow B$ on koretraktsioonid, s.t. $sk = 1_B$ ja $tf = 1_A$ mingite $s : D \rightarrow B$ ja $t : B \rightarrow A$ korral, siis võrduste ahel

$$(ts)(kf) = t(sk)f = t1_B f = tf = 1_A$$

näitab, et kf on koretraktsioon.

$$A \xleftarrow[t]{f} B \xleftarrow[s]{k} D$$

4. Oletame, et kf on monomorfism ja $fg = fh$, kus $f : A \rightarrow B$, $k : B \rightarrow D$, ja $g, h : C \rightarrow A$. Siis

$$(kf)g = k(fg) = k(fh) = (kf)h,$$

millest järeldub $g = h$. Seega f on monomorfism.

Kui kf on koretraktsioon, s.t. $s(kf) = 1_A$ mingi $s : D \rightarrow A$ korral, siis $(sk)f = 1_A$ tähendab, et ka f on koretraktsioon. ■

Definitsioon 2.3. Morfismi $f : A \rightarrow B$ kategoorias $\mathcal{C}$ nimetatakse

- **epimorfismiks** kui ta on paremalt taandatav, s.t.

$$gf = hf \Rightarrow g = h$$

iga morfismipaari $g, h : B \rightarrow C$ korral;

- **retraktsiooniks**, kui ta on paremalt pööratav, s.t. leidub morfism $g : B \rightarrow A$ nii, et $fg = 1_B$.

Analoogiliselt lausega 2.2 saab tõestada järgmise lause.

Lause 2.4. *Kategoorias $\mathcal{C}$*

1. iga retraktsioon on epimorfism;
2. iga ühikmorfism on retraktsioon;
3. kahe epimorfismi (retraktsiooni) korrutis on epimorfism (retraktsioon);
4. kui kahe morfismi korrutis kf on epimorfism (retraktsioon), siis k on epimorfism (retraktsioon).

Definitsioon 2.5. Kategooriat nimetatakse **konkreetseks kategooriaks**, kui tema objektid on hulgad (harilikult mingi struktuuriga), morfismid on kujutused (mis harilikult säilitavad vaadeldavat struktuuri), morfismide komponeerimine on kujutuste järjestakendamine ja ühikmorfismid on samasusteisendused.

Set, Gr, Rng, Top, Ban_∞ , Pos ja paljud teised on konkreetsete kategooriate näideteks. Rel ei ole konkreetne kategooria, sest mitte kõik binaarsed seosed ei ole kujutused. Konkreetsetes kategooriates, saab eri tüüpi morfismide suhete kohta rohkem öelda.

Lause 2.6. *Konkreetses kategoorias kehtivad morfismide jaoks järgmised implikatsioonid:*

$$\begin{array}{ccccc} \text{koretraktsioon} & \xrightarrow{(ki)} & \text{injektiivne} & \xrightarrow{(im)} & \text{monomorfism,} \\ & & \xrightarrow{(rs)} & \text{sürjektiivne} & \xrightarrow{(se)} \text{epimorfism.} \end{array}$$

Tõestus. (ki). Oletame, et morfismi $f : A \rightarrow B$ jaoks leidub selline morfism $g : B \rightarrow A$, et $gf = 1_A$. Kui $f(a_1) = f(a_2)$, $a_1, a_2 \in A$, siis ka $a_1 = (gf)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (gf)(a_2) = a_2$. Seega f on injektiivne.

(im). Oletame, et $f : A \rightarrow B$ on injektiivne ja $fg = fh$, kus $g, h : C \rightarrow A$. Siis iga $c \in C$ korral $f(g(c)) = f(h(c))$, millest järeldub, et $g(c) = h(c)$ iga $c \in C$ korral. Järelikult $g = h$ ja me oleme tõestanud, et f on monomorfism.

Ei ole raske veenduda, et ka implikatsioonid (rs) ja (se) kehtivad. ■

Näide 2.7. Osutub, et hulkade kategoorias Set on monomorfismideks parajasti injektiivsed kujutused. Lause 2.6 põhjal me juba teame et injektiivsed kujutused on monomorfismid. Tõestame vastupidise väite. Olgu $f : A \rightarrow B$ monomorfism ning iga elemendi $a \in A$ korral olgu $g_a : \{*\} \rightarrow A$ kujutus üheelemendilisest hulgast $\{*\}$ hulka A , mis kujutab elemendi $*$ elemendiks a . Kui $f(a) = f(a')$, $a, a' \in A$, siis $(fg_a)(*) = (fg_{a'})(*)$, millest $fg_a = fg_{a'}$. Eelduse põhjal $g_a = g_{a'}$, mis on samaväärne võrdusega $a = a'$. Seega f on injektiivne.

Näide 2.8. Kategoorias Top on monomorfismideks injektiivsed pidevad kujutused. Tõepoolest, vaadel-des üheelemendilist topoloogilist ruumi $\{*\}$ ja mistahes teist topoloogilist ruumi A paneme tähele, et kujutused $g_a : \{*\} \rightarrow A$, $a \in A$, mis on defineeritud näites 2.7, on pidevad ning järelikult morfismid kategoorias Top. Seega näite 2.7 tõestuse saab üle kanda.

Näide 2.9. Kategooriates Gr ja Ab on monomorfismideks injektiivsed rühmade homomorfismid. Jällegi peame näitama ainult seda, et monomorfismid on injektiivsed. Olgu $f : G \rightarrow H$ rühmade monomorfism ja iga $a \in G$ korral olgu $g_a : \mathbb{Z} \rightarrow G$ kujutus, mis on defineeritud võrdusega

$$g_a(z) := a^z.$$

Ilmselt g_a on rühmade homomorfism. Kui $f(a) = f(a')$, siis $(fg_a)(1) = (fg_{a'})(1)$. Lihtne on näidata, et siis ka $(fg_a)(z) = (fg_{a'})(z)$ iga $z \in \mathbb{Z}$ korral ning järelikult $fg_a = fg_{a'}$. Eelduse põhjal $g_a = g_{a'}$ ja seega $a = g_a(1) = g_{a'}(1) = a'$.

Näide 2.10. Kategoorias Ban_1 on monomorfismideks injektiivsed ahendavad lineaarsed operaatorid (ehk ahendavad lineaarkujutused, need on lineaarkujutused $f : B \rightarrow C$, mis rahuldavad tingimust $\|f(b)\| \leq \|b\|$ iga $b \in B$ korral). Selle tõestamiseks oletame, et $f : B \rightarrow C$ on Banachi ruumide monomorfism ja $f(b) = f(b')$. Peame näitama, et $b = b'$. Vaatleme erinevaid võimalusi.

1) Olgu $\|b\|, \|b'\| \leq 1$. Siis kujutused $k_b, k_{b'} : \mathbb{R} \rightarrow B$, mis on defineeritud vördustega

$$k_b(r) := rb, \quad k_{b'}(r) := rb',$$

$r \in \mathbb{R}$, on ahendavad operaatorid. Kehtivad vördused $(fk_b)(1) = f(b) = f(b') = (fk_{b'})(1)$. Lineaarsuse tõttu

$$(fk_b)(r) = r(fk_b)(1) = r(fk_{b'})(1) = (fk_{b'})(r)$$

iga reaalarvu r korral. Sellest järeldub, et $fk_b = fk_{b'}$. Kuna f on monomorfism, siis $k_b = k_{b'}$ ja seega $b = b'$.

2) Olgu $\|b\|, \|b'\| > 1$. Tähistame

$$r := \frac{1}{\|b\| \cdot \|b'\|}, \quad b_1 := rb, \quad b'_1 := rb'.$$

Siis $\|b\|, \|b'_1\| \leq 1$. Korrutades vörduse $f(b) = f(b')$ mõlemad pooli arvuga r ja kasutades lineaarsust saame vörduse $f(b_1) = f(b'_1)$. Rakendades osas 1) tõestatut võime väita, et $b_1 = b'_1$, millest järeldub vördus $b = b'$.

3) Olgu $\|b\| \leq 1$ ja $\|b'\| > 1$. Selle juhu jätame lugejale läbimõtlemiseks.

Näide 2.11. Implikatsioon (im) ei ole pööratav, s.t. mitte kõik monomorfismid konkreetsetes kategoorias ei pruugi olla injektiivsed. Vaatleme jaguvate Abeli rühmade kategooriat Div . Meenutame, et Abeli rühm A on **jaguv**, kui iga $a \in A$ ja iga naturaalarvu n korral leidub selline $b \in A$, et $nb = a$. Loomulik sürjektsioon $\pi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ jaguva rühma $\mathbb{Q}$ faktorrühmale alamrühma $\mathbb{Z}$ järgi ei ole injektiivne, sest näiteks $\pi(3) = \bar{3} = \bar{4} = \pi(4)$, kuigi $3 \neq 4$. (Märgime, et faktorrühma $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ elementideks on kõrvalklassid $a + \mathbb{Z} =: \bar{a}$, kus $a \in \mathbb{Q}$, ning vördus $\bar{a} = \bar{b}$ kehtib parajasti siis, kui $a - b \in \mathbb{Z}$.)

Näitame, et π on monomorfism. Oletame, et A on jaguv Abeli rühm ja $f, g : A \rightarrow \mathbb{Q}$ on sellised rühmade homomorfismid, et $\pi f = \pi g$. Võttes $h := f - g : A \rightarrow \mathbb{Q}$ saame $\pi h = 0$ (siin 0 on nullkujutus $A \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $a \mapsto \bar{0}$). Me peame tõestama, et $h = 0$. Teame, et iga $a \in A$ korral $\bar{0} = (\pi h)(a) = \bar{h(a)}$, s.t. $h(a) \in \mathbb{Z}$. Oletame vastuväiteliselt, et $h \neq 0$. Siis leidub selline $a \in A$, et $h(a) \in \mathbb{N}$. Tänu jaguvusele saame naturaalarvu $2h(a)$ jaoks leida sellise $b \in A$, et $2h(a) \cdot b = a$. Et h on Abeli rühmade homomorfism, siis

$$h(a) = h(2h(a) \cdot b) = 2h(a)h(b),$$

kus viimane korrutis on hulgas $\mathbb{Q}$. Jagades selle vörduse mõlemad pooli nullist erineva ratsionaalarvuga $2h(a)$ saame vörduse $h(b) = \frac{1}{2}$, mis on vastuolus eelpoolmainituga. Järelikult peab $h = 0$.

Näide 2.12. Ka implikatsioon (ki) ei ole pööratav. Kategoorias Set on tühjad kujutused $\emptyset \rightarrow A$ injektiivsed, aga neil ei ole vasakpoolset pöördelementi, kui $A \neq \emptyset$. Siiski iga injektiivne kujutus $B \rightarrow A$ kategoorias Set , kus $B \neq \emptyset$, on koretraktsioon.

Näide 2.13. Kategoorias Set on epimorfismideks sürjektiivsed kujutused. Selles veendumiseks vaatleme epimorfismi $f : A \rightarrow B$, kaheelemendilist hulka $\{0, 1\}$ ja kujutusi $g, h : B \rightarrow \{0, 1\}$, mis on defineeritud vördustega

$$\begin{aligned} g(b) &= \begin{cases} 1, & \text{kui } b \in f(A), \\ 0, & \text{kui } b \notin f(A), \end{cases} \\ h(b) &= 1 \text{ iga } b \in B \text{ korral.} \end{aligned}$$

Ilmselt $gf = hf : A \rightarrow \{0, 1\}$ on konstantsed kujutused elemendile 1. Järelikult $g = h$, mis tähendab, et $f(A) = B$ ehk f on sürjektiivne. Vastupidine väide järeldub lausest 2.6.

Veelgi enam, kategoorias Set on iga sürjektiivne kujutus retraktsioon. Olgu $f : A \rightarrow B$ sürjektiivne kujutus. Defineerime kujutuse $g : B \rightarrow A$ valides iga $b \in B$ jaoks elemendi $a_b \in A$ nii, et $f(a_b) = b$ ja võttes $g(b) := a_b$. Siis ilmselt $(fg)(b) = f(g(b)) = f(a_b) = b$ iga $b \in B$ korral ja seega $fg = 1_B$. (Paneme tähele, et kõigi nende (üldjuhul lõpmata paljude) valikute tegemiseks on meil vaja valikuaktsiooni.)

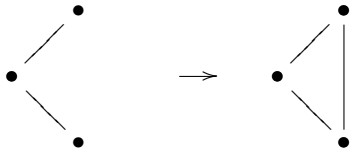
Näide 2.14. Kategoorias Top on epimorfismideks sürjektiivsed pidevad kujutused. Selles veendumiseks kasutame näidet 2.13, milles topoloogiliseks ruumiks on $\{0, 1\}$ topoloogiaga $\{\emptyset, \{0, 1\}\}$ ning g ja h on defineeritud samamoodi. On selge, et g ja h on siis pidevad kujutused.

Näide 2.15. Kategoorias $\mathbf{Ban}_1$ on epimorfismideks tiheda kujutisega ahendavad operaatorid. (Lineaar-kujutusel $f : A \rightarrow B$ kategoorias $\mathbf{Ban}_1$ on tihe kujutis, kui sulund $\overline{f(A)} = B$, s.t. et iga $b \in B$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $a \in A$ nii, et $\|f(a) - b\| < \varepsilon$.)

Oletame, et $f : A \rightarrow B$ on epimorfism. Siis $\overline{f(A)}$ on B kinnine alamruum ja faktorruum $B/\overline{f(A)}$ on Banachi ruum. Nii loomulik surjektsioon $\pi : B \rightarrow B/\overline{f(A)}$ kui ka nullkujutus $0 : B \rightarrow B/\overline{f(A)}$ on ahendavad operaatorid. Kuna $\pi f = 0 = 0f$, saais $\pi = 0$, mis tähendab, et $B = \overline{f(A)}$.

Vastupidi, oletame et $\overline{f(A)} = B$ ja $gf = hf$, $g, h : B \rightarrow C$. Kuna g ja h langevad kokku hulgal $f(A)$, siis pidevuse tõttu g, h langevad kokku ka hulgal $\overline{f(A)} = B$. Seega $g = h$.

Näide 2.16. Implikatsioon (rs) ei ole pööratav. Kategoorias $\mathbf{Graph}$ leidub surjektiivne homomorfism



millel ei ole parempoolset pöördmorfismi.

Näide 2.17. Implikatsioon (se) ei ole pööratav. Vaatleme monoidide ja monoidide homomorfismide kategooriat $\mathbf{Mon}$ ning monoidi $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ sisestust i monoidi $(\mathbb{Z}, +)$, mis kindlasti ei ole surjektiivne. Samas osutub ta epimorfismiks.

Vaatleme monoidide homomorfismi $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (S, \cdot)$. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1)^n,$$

s.t. $f(n)$ on määratud $f(1)$ poolt. Lisaks sellele, $f(1)$ on $f(-1)$ pöördelement monoidis S , sest

$$f(1)f(-1) = f(1 + (-1)) = f(0) = 1 = f(0) = f((-1) + 1) = f(-1)f(1).$$

Kuna igal S elemendil saab olla ainult üks pöördelement, siis $f(-1)$ on määratud $f(1)$ poolt. Samuti f väärtus igal teisel negatiivsel täisarvul on määratud $f(1)$ poolt. Seega homomorfism f on täielikult ära määratud elemendiga $f(1) \in S$.

Nüüd oletame, et $g, h : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (S, \cdot)$ on sellised monoidide homomorfismid, et $gi = hi$. Siis $g(1) = g(i(1)) = h(i(1)) = h(1)$ ja seega $g = h$. Järelikult i on epimorfism.

Definitsioon 2.18. Morfismi nimetatakse **bimorfismiks**, kui ta on nii monomorfism kui epimorfism, s.t. kui ta on taandatav.

Definitsioon 2.19. Morfismi nimetatakse **isomorfismiks**, kui ta on nii koretraktsioon kui ka retraktsioon, s.t. kui ta on pööratav. Kategooria $\mathcal{C}$ objektid A ja B on **isomorfsed** kui leidub isomorfism $f : A \rightarrow B$. Objektide A ja B isomorfsust tähistatakse $A \cong B$.

Lause 2.20. Kategoorias $\mathcal{C}$

1. iga isomorfism on bimorfism;
2. iga ühikmorfism on isomorfism;
3. kahe bimorfismi (isomorfismi) korrutis on bimorfism (isomorfism).

Tõestus. See järelneb lausest 2.2 ja lausest 2.4. ■

Järeldus 2.21. Objektide isomorfsuseos on ekvivalentsiseos.

Lause 2.22. Kui epimorfism on koretraktsioon, siis on ta isomorfism.

Tõestus. Harjutus. ■

Näide 2.23. Kategoorias $\mathbf{Set}$ on isomorfismideks bijektiivsed kujutused.

Näide 2.24. Kategooriates $\mathbf{Gr}$, $\mathbf{Ab}$ ja $\mathbf{Rng}$ on isomorfismideks bijektiivsed homomorfismid.

Näide 2.25. Kategoorias **Top** on isomorfismideks homöomorfismid (pidevad lahtised bijektsioonid). Kuna pidevad bijektsioonid ei pruugi olla homöomorfismid, siis on see näiteks kategooriast, kus bimorfismid ei pruugi olla isomorfismid.

Näide 2.26. Kategoorias $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$ on isomorfismideks bijektiivsed lineaarkujutused.

Näide 2.27. Kategoorias Ban_1 on isomorfismideks isomeetrilised bijektsioonid. (Meenutame, et lineaarkujutus $f : A \rightarrow B$ Banachi ruumide vahel on isomeetiline, kui $\|f(a)\| = \|a\|$ iga $a \in A$ korral.) Iga isomeetiline bijektsioon $f : A \rightarrow B$ on isomorfism, sest pöördkujutus $f^{-1} : B \rightarrow A$ on lineaarne,

$$\|b\| = \|(ff^{-1})(b)\| = \|f(f^{-1}(b))\| = \|f^{-1}(b)\|$$

iga $b \in B$ korral ning seega f^{-1} on ahendav lineaarne operaator. Vastupidi, kui ahendaval operaatoril $f : A \rightarrow B$ on olemas pöördkujutus $f^{-1} : B \rightarrow A$, mis on samuti ahendav operaator, siis f on isomeetiline. Tõepoolest, kuna

$$\|a\| = \|(f^{-1}f)(a)\| = \|f^{-1}(f(a))\| \leq \|f(a)\|$$

ja $\|f(a)\| \leq \|a\|$ iga $a \in A$ korral, siis $\|f(a)\| = \|a\|$ iga $a \in A$ korral.

Näide 2.28. Iga rühma võib vaadelda kui üheobjektulist kategooriat, kus kõik morfismid on isomorfismid.

Näide 2.29. Meenutame, et iga järjestatud hulka võib vaadelda kategooriana (näide 1.5). Sellises kategoorias on iga morfism bimorfism, sest mistahes kahe objekti vahel leidub ülimalt üks morfism. Isomorfismid on aga ainult ühikmorfismid.

2.2. Objektide liigid

Definitsioon 2.30. Kategooria $\mathcal{C}$ objekti **1** nimetatakse **lõppobjektiks**, kui $\mathcal{C}$ igast objektist C leidub täpselt üks morfism objekti **1**. Kategooria $\mathcal{C}$ objekt **0** on **algobjekt**, kui objektist **0** leidub täpselt üks morfism $\mathcal{C}$ igasse objekti. Objekt on **nullobjekt**, kui ta on korraga nii lõpp- kui algobjekt.

Lause 2.31. Kategooria mistahes kaks lõpp-(alg-, null-)objekti on isomorfsed.

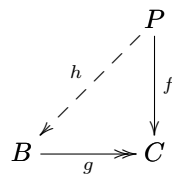
Tõestus. Kui $C, C' \in \mathcal{C}_0$ on lõppobjektid, siis $\mathcal{C}(C, C) = \{1_C\}$ ja $\mathcal{C}(C', C') = \{1_{C'}\}$. Samuti leiduvad morfismid $f : C \rightarrow C'$ ja $g : C' \rightarrow C$. Kuna $gf : C \rightarrow C$, siis $gf = 1_C$ ja samamoodi $fg = 1_{C'}$. Seega $C \cong C'$. Alg- ja nullobjektide jaoks on tõestus analoogiline. ■

Näide 2.32. Kategoorias **Set** on tühi hulk algobjekt ja üheelemendilised hulgad on lõppobjektid. Sama kehtib kategooria **Top** korral.

Näide 2.33. Kategooriates **Ab**, $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$ ja Ban_1 on $\{0\}$ nii alg- kui ka lõppobjekt, seega nullobjekt.

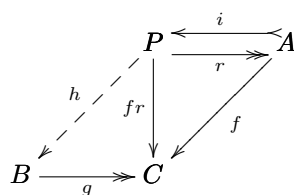
Näide 2.34. Ühikelemendiga assotsiatiivsete ringide kategoorias **Rng** on $\{0\}$ lõppobjekt ja $\mathbb{Z}$ algobjekt.

Definitsioon 2.35. Kategooria $\mathcal{C}$ objekti P nimetatakse **projektiivseks**, kui iga epimorfismi $g : B \rightarrow C$ ja iga morfismi $f : P \rightarrow C$ jaoks leidub selline morfism $h : P \rightarrow B$, et $gh = f$.



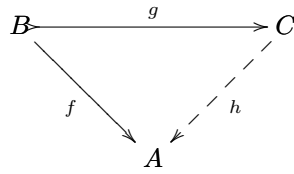
Lause 2.36. Projektiivse objekti reakt on projektiivne.

Tõestus. Järgmises diagrammis olgu P projektiivne ja olgu A tema reakt, s.t. $ri = 1_A$ mingite $r : P \rightarrow A$ ja $i : A \rightarrow P$ korral (vt. definitsiooni 2.1).



Kui $f : A \rightarrow C$, siis P projektiivsuse tõttu leidub selline $h : P \rightarrow B$, et $gh = fr$. Seega $ghi = fri = f$. ■

Definitsioon 2.37. Kategooria $\mathcal{C}$ objekti A nimetatakse **injektiivseks**, kui iga monomorfismi $g : B \rightarrow C$ ja iga morfolismi $f : B \rightarrow A$ korral leidub selline morfolism $h : C \rightarrow A$, et $hg = f$.



Näide 2.38. Kategooria **Set** iga objekt on projektiivne. Kasutades fakti, et iga epimorfism on retraktsioon kategoorias **Set** ja definitsiooni 2.35 tähistusi saame leida sellise $p : C \rightarrow B$, et $gp = 1_C$. Võttes $h := pf$ saame, et $gh = gpf = f$.

Näide 2.39. Üks klassikalisi algebra tulemusi väidab, et Abeli rühm on injektiivne parajasti siis, kui ta on jaguv.

Näide 2.40. Projektiivsed ja injektiivsed objektid mängivad tähtsat rolli moodulite teoorias (üle ringi). Klassikaline tulemus on, et a moodul on projektiivne parajasti siis, kui ta on vaba mooduli otseliidetav. Projektiivsed moodulid on nii ringide Morita teooria kui ka algebralise K -teooria nurgakiviks.

Ülesanded 2.41. 1. Tõestada, et kui epimorfism on koretraktsioon, siis ta on isomorfism.

2. Tõestada, et konkreetsetes kategoorias on iga retraktsioon sürjektiivne (vt. lauset 2.6).
3. Tõestada, et konkreetsetes kategoorias on iga sürjektiivne morfolism epimorfism (vt. lauset 2.6).
4. Millised on monomorfismid, epimorfismid, bimorfismid ja isomorfismid sinu lemmikkategoorias?
5. Kas su lemmikkategoorial on olemas lõpp-, alg- või nullobjekt?
6. Tõestada otse, et kategooria **Set** iga objekt on projektiivne (vt. näidet 2.38).
7. Millised on projektiivsed objektid sinu lemmikkategoorias?
8. Tõestada, et kategooria **Set** objekt on injektiivne parajasti siis, kui ta on mittetühi.

3. Funktorid

3.1. Kovariantsed ja kontravariantsed funktorid

Definitsioon 3.1. Kovariantne funktor F kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ koosneb

1. kujutusest $F_0 : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ objektide klasside vahel; objekti $A \in \mathcal{A}_0$ kujutist tähistatakse $F(A)$;
2. $\mathcal{A}$ iga objektipaari (A, A') jaoks kujutusest $F_1^{A, A'} : \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(F(A), F(A'))$; morfismi $f \in \mathcal{A}(A, A')$ kujutist tähistatakse $F(f)$;

nii et on täidetud järgmised tingimused:

1. mistahes morfismide $f \in \mathcal{A}(A, A')$ ja $g \in \mathcal{A}(A', A'')$ korral

$$F(gf) = F(g)F(f);$$

2. iga objekti $A \in \mathcal{A}_0$ korral

$$F(1_A) = 1_{F(A)}.$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & F(A) \\ f \downarrow & & \downarrow F(f) \\ A' & \xrightarrow{\quad} & F(A') \end{array}$$

Definitsioon 3.2. Kontravariantne funktor F kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ koosneb

1. kujutustest $F_0 : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ objektide klasside vahel; objekti $A \in \mathcal{A}_0$ kujutist tähistatakse $F(A)$;
2. $\mathcal{A}$ iga objektipaari (A, A') jaoks kujutustest $F_1^{A, A'} : \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(F(A'), F(A))$; morfismi $f \in \mathcal{A}(A, A')$ kujutist tähistatakse $F(f)$;

nii et on täidetud järgmised tingimused:

1. mistahes morfismide $f \in \mathcal{A}(A, A')$ ja $g \in \mathcal{A}(A', A'')$ korral

$$F(gf) = F(f)F(g);$$

2. iga objekti $A \in \mathcal{A}_0$ korral

$$F(1_A) = 1_{F(A)}.$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & F(A) \\ f \downarrow & & \uparrow F(f) \\ A' & \xrightarrow{\quad} & F(A') \end{array}$$

Näited 3.3. Toome mõned kovariantsete funktorite näited.

1. Iga kategooria $\mathcal{A}$ korral leidub **ühikfunktor** $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, mis on objektidel defineeritud võrdusega $1_{\mathcal{A}}(A) = A$ ja morfismidel võrdusega $1_{\mathcal{A}}(f) = f$.
2. Kategooria $\mathcal{A}$ iga alamkategooria $\mathcal{B}$ tekitab loomulikult viisil **sisestusfunktori** $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, mis on lihtsalt ühikfunktori $1_{\mathcal{A}}$ ahend kategooriale $\mathcal{B}$.

3. Kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on kategooriad ja $B \in \mathcal{B}_0$ on fikseeritud objekt, siis leidub **konstantne funktor** objektile B , $\Delta_B^A : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ehk lihtsalt Δ_B , mis on defineeritud võrdustega

$$\Delta_B(A) := B, \quad \Delta_B(f) := 1_B$$

iga $A \in \mathcal{A}_0$ ja kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi f korral.

4. **Unustav funktor** $U : \mathbf{Gr} \rightarrow \mathbf{Set}$ kujutab rühma $(A, \cdot)$ tema põhihulgaks A ja rühmahomomorfismid vastavateks kujutusteks. Samamoodi võib veel vaadelda unustavaid funktoreid $\mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Ab}$ (“unustab ära” korrutamise), $\mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Mon}$ (“unustab ära” liitmise) või $\mathbf{Ban}_1 \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ (“unustab ära” normi).
5. **Vaba rühma funktor** $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Gr}$ seab igale hulga A vastavusse vaba rühma, mille tekitajate hulga on A , ning igale kujutusele f indutseeritud homomorfismi, mis tekitajatel langeb kokku kujutusega f .
6. Iga rühma A korral olgu A' selle rühma kommutaatoralamrühm, s.t. alamrühm, mis on tekitatud kõigi elementide poolt, mis on kujul $aba^{-1}b^{-1}$, kus $a, b \in A$. Defineerime $F : \mathbf{Gr} \rightarrow \mathbf{Ab}$ võrdustega

$$F(A) := A/A', \quad F(h)(aA') := h(a)B',$$

kõigi rühmade A, B ja rühmade homomorfismide $h : A \rightarrow B$ korral. Siis F on funktor, mida nimetame **abelistamise funktoriks**.

7. Kui R on ring ja M_R on fikseeritud parempoolne R -moodul, siis leidub mooduliga M_R tensorkorrutamise funktor $M_R \otimes - : {}_R\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ (vasakpoolsete R -moodulite kategooriast Abeli rühmade kategooriasse $\mathbf{Ab}$), mis on defineeritud võrdustega

$$(M_R \otimes -)({}_R N) := M \otimes_R N, \quad M_R(f) := 1_M \otimes f$$

iga vasakpoolse R -mooduli ${}_R N$ ja iga vasakpoolsete R -moodulite homomorfismi f korral.

8. Olgu $(P, \leq)$ ja $(Q, \leq)$ järjestatud hulgad, mida vaatleme kategooriatena nii nagu näites 1.5(2). Selliste kategooriate vahelised funktorid on parajasti kujutused $f : P \rightarrow Q$, mis säilitavad järjestuse.
9. Olgu $(S, \cdot)$ ja $(T, *)$ monoidid, mida vaatleme kategooriatena nii nagu näites 1.5(4). Selliste kategooriate vahelised funktorid on parajasti nende monoidide vahelised homomorfismid. Seega funktorit võib vaadelda monoidide homomorfismi üldistusena.

Näited 3.4. On ka palju kontravariantsete funktorite näiteid.

1. Leidub funktor $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, mis seab igale hulga A vastavusse tema kõigi alamhulkade hulga $\mathcal{P}(A)$ ja kujutusele $f : A \rightarrow B$ kujutuse $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, mis kujutab B alamhulga C hulga $f^{-1}(C) \subseteq A$.
2. Kui (X, τ) on topoloogiline ruum, siis X kõigi lahtiste alamhulkade U hulk τ on järjestatud hulk sisalduvusseose suhtes ja seega tekitab kategooria, kus morfism $i_U^V : V \rightarrow U$ leidub parajasti siis, kui $V \subseteq U$. Olgu $\overline{\mathcal{C}}(U) = \{h : U \rightarrow \mathbb{R} \mid h \text{ on pidev}\}$. Siis $\overline{\mathcal{C}} : \tau \rightarrow \mathbf{Set}$ on funktor, kui defineerime kujutused $\overline{\mathcal{C}}(i_U^V) : \overline{\mathcal{C}}(U) \rightarrow \overline{\mathcal{C}}(V)$ võrdusega

$$\overline{\mathcal{C}}(i_U^V)(h) := h|_V.$$

Järgmisena toome sisse funktorid, mis on kategooriateoorias väga suure tähtsusega.

Näide 3.5. Kategooria $\mathcal{C}$ fikseeritud objekti C korral defineerib reegel

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}(C, A) & \ni & g \\ \downarrow f & & \downarrow f \circ - & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}(C, B) & \ni & fg \end{array}$$

kovariantse funktori $\mathcal{C}(C, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, mida nimetatakse **kovariantseks hom-funktoriks** või **kovariantseks mor-funktoriks**. (Märgime, et tihti kirjutatakse $f \circ -$ asemel $\mathcal{C}(C, f)$.)

Näide 3.6. Kategooria $\mathcal{C}$ fikseeritud objekti C korral defineerib reegel

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}(A, C) & \ni & gf \\ f \downarrow & & \uparrow - \circ f & & \uparrow \\ B & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}(B, C) & \ni & g \end{array}$$

kontravariantse funktori $\mathcal{C}(-, C) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$, mida nimetatakse **kontravariantseks hom-funktoriks** või **kontravariantseks mor-funktoriks**.

Funktorite $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ja $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ korral on võimalik moodustada nende kompositsioon ehk korrutis $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ (mis osutub samuti funktoriks), kui defineerida

$$(GF)(A) := G(F(A)), \quad (GF)(f) := G(F(f))$$

$\mathcal{A}$ iga objekti $A \in \mathcal{A}_0$ ja iga morfismi f korral. Korrutise GF variantsus on määratud järgmise reeglga:

F	G	GF
kovariantne	kovariantne	kovariantne
kovariantne	kontravariantne	kontravariantne
kontravariantne	kovariantne	kontravariantne
kontravariantne	kontravariantne	kovariantne.

Funktorite komponeerimine on assotsiatiivne ja ühikfunktorid käituvad ühikelementidena sellise komponeerimise suhtes. See võib viia mõttele vaadelda “kõigi kategooriate kategooriat”, kus funktorid mängiks morfismide rolli. Kahjuks kõigi kategooriate kogum ei ole enam klass ja ka kõigi ühest kategooriast teise viivate funktorite kogum ei pruugi olla hulk. Väljapääs sellest on muuta kategooria definitsiooni lubades suuremaid objektide ja morfismide kogumeid (neid kutsutakse mõnikord konglomeraatideks). Selliseid asju nimetame **kvaasikategooriateks** (Herrliche ja Streckeri järgi). Seega kõigi kategooriate ja nende vaheliste funktorite kogum, mis on varustatud funktorite komponeerimisega, on kvaasikategooria, mida tähistatakse CAT . Siiski, kui $\mathcal{A}$ on väike kategooria ja $\mathcal{B}$ on suvaline kategooria, siis kõigi funktorite kogum $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ on klass, ja kui $\mathcal{B}$ on ka väike, siis $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ on hulk. Seega võime kõnelda **kõigi väikeste kategooriate kategooriast**, mida tähistatakse Cat .

3.2. Duaalsusest

Jämedalt öeldes tähendab kategoorne duaalsus “kõigi morfismide ümberpööramist”.

Definitsioon 3.7. Kategooria $\mathcal{C}$ **duaalne kategooria** $\mathcal{C}^{\text{op}}$ defineeritakse järgmiselt.

1. Kategooriatel $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{C}^{\text{op}}$ on samad objektid, $\mathcal{C}_0^{\text{op}} = \mathcal{C}_0$.
2. Iga $A, B \in \mathcal{C}_0^{\text{op}}$ korral $\mathcal{C}^{\text{op}}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$, s.t. $\mathcal{C}^{\text{op}}$ morfismid on $\mathcal{C}$ morfismid, mida “kirjutatakse vastupidises suunas”. Segaduse vältimiseks kirjutame $f^{\text{op}} : A \rightarrow B$, kui vaatleme $\mathcal{C}$ morfismi $f : B \rightarrow A$ kui $\mathcal{C}^{\text{op}}$ morfismi.
3. Komponeerimine kategoorias $\mathcal{C}^{\text{op}}$ defineeritakse võrdusega

$$f^{\text{op}} g^{\text{op}} := (gf)^{\text{op}}.$$

$$\text{Kategoorias } \mathcal{C} : \quad A \xrightarrow{\quad f \quad} B \xrightarrow{\quad g \quad} C \qquad \text{Kategoorias } \mathcal{C}^{\text{op}} : \quad A \xleftarrow{\quad f^{\text{op}} \quad} B \xleftarrow{\quad g^{\text{op}} \quad} C$$

Iga kategooriate jaoks defineeritud mõiste jaoks leidub duaalne mõiste (mille nimi tekitatakse hari-likult eesliite ‘ko-’ abil), mis saadakse definitsioonis kõigi morfismide suuna muutmisel vastupidiseks ja kompositsioonide fg asendamisel kompositsioonidega gf . Samuti on iga väite jaoks olemas duaalne väide. **Duaalsusprintsip** ütleb, et kui mingi väide on tõene kõigis kategooriates, siis ka selle väite duaalne väide on tõene kõigis kategooriates.

Me näeme, et lõppobjektid on duaalsed algobjektidega, epimorfismid monomorfismidega, projektiivsus on injektiivsuse duaalne mõiste jne. Samuti näiteks, kui me teame, et lõppobjektid on igas kategoorias määratud üheselt isomorfismi täpsusega, siis duaalsusprintsipi põhjal ka algobjektid on määratud üheselt isomorfismi täpsusega.

Lause 3.8. Kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ korral leidub üksühene vastavus kontravariantsete funktoore $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ja kovariantsete funktoore $\mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}$ vahel.

Tõestus. On selge, et iga kategooria $\mathcal{C}$ korral eeskiri

$$(-)^{\text{op}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}, \quad C \mapsto C, \quad f \mapsto f^{\text{op}}$$

on kontravariantne funktoir ja $(-)^{\text{op}} \circ (-)^{\text{op}} = 1_{\mathcal{C}}$ (ehk $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$).

Kui $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on kontravariantne funktoir, siis $F \circ (-)^{\text{op}} : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}$ on kovariantne funktoir, sest kahe kontravariantse funktoori kompositsioon on kovariantne funktoir. Samuti, kui $G : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}$ on kovariantne funktoir, siis $G \circ (-)^{\text{op}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on kontravariantne funktoir. Et $F \circ (-)^{\text{op}} \circ (-)^{\text{op}} = F$ ja $G \circ (-)^{\text{op}} \circ (-)^{\text{op}} = G$, siis ongi meil olemas nõutav üksühene vastavus. ■

Seda tulemust silmas pidades räägime edaspidises vaheajal alati kovariantsetest funktoirtest (mis lähtuvad siis kas kategooriast $\mathcal{A}$ või $\mathcal{A}^{\text{op}}$). Mõnikord võib olla mugav vaadelda kontravariantseid funktoireid $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ kui kovariantseid funktoireid $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{op}}$.

3.3. Funktoirte omadusi

Definitsioon 3.9. Vaatleme funktoirit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ja iga objektipaari $A, A' \in \mathcal{A}_0$ korral kujutust

$$F_1^{A,A'} : \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(F(A), F(A')), \quad f \mapsto F(f).$$

Funktoir F on

- **täpne**, kui kujutus $F_1^{A,A'}$ on injektiivne iga $A, A' \in \mathcal{A}_0$ korral;
- **täielik**, kui kujutus $F_1^{A,A'}$ on sürjektiivne iga $A, A' \in \mathcal{A}_0$ korral;
- **täielik ja täpne**, kui kujutus $F_1^{A,A'}$ on bijektiivne iga $A, A' \in \mathcal{A}_0$ korral;
- **kategooriate isomorfism**, kui leidub selline funktoir $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, et $FG = 1_{\mathcal{A}}$ ja $GF = 1_{\mathcal{B}}$.

Näide 3.10. 1. Unustav funktoir $U : \text{Gr} \rightarrow \text{Set}$ on täpne, aga mitte täielik ning ta ei ole kategooriate isomorfism.

2. Unustav funktoir $U : \text{Ab} \rightarrow \text{Gr}$ on täielik ja täpne, sest mistahes Abeli rühmade A ja B korral $\text{Ab}(A, B) = \text{Gr}(A, B)$.
3. Konstantne funktoir $\Delta_B : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ei ole harilikult ei täielik ega täpne.
4. Kaks monoidi kui kategooriad on isomorfsed parajasti siis kui nad on isomorfsed monoididena.

Definitsioon 3.11. Vaatleme funktoirit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

1. F **säilitab monomorfisme**, kui $\mathcal{A}$ iga morfismi f korral

$$f \text{ on monomorfism} \Rightarrow F(f) \text{ on monomorfism.}$$

2. F **peegeldab monomorfisme**, kui $\mathcal{A}$ iga morfismi f korral

$$F(f) \text{ on monomorfism} \Rightarrow f \text{ on monomorfism.}$$

Loomulikult saab samasugused definitsioonid anda ka teiste morfismitüüpide jaoks.

Lause 3.12. Täpne funktoir peegeldab monomorfisme ja epimorfisme.

Tõestus. Vaatleme täpset funktoori $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ja morfismi $f : A \rightarrow A'$ kategoorias $\mathcal{A}$, mille korral $F(f) : F(A) \rightarrow F(A')$ on monomorfism kategoorias $\mathcal{B}$. Oletame, et $fg = fh$ mingite morfismide $g, h : A'' \rightarrow A$ korral. Siis

$$fg = fh \implies F(f)F(g) = F(f)F(h) \implies F(g) = F(h) \implies g = h,$$

kus teine implikatsioon kehtib sellepärast, et $F(f)$ on monomorfism ja viimane implikatsioon sellepärast, et F on täpne. Samamoodi, kui $F(f)$ on epimorfism ja $gf = hf$ mingite $g, h : A' \rightarrow A''$ korral, siis

$$gf = hf \implies F(g)F(f) = F(h)F(f) \implies F(g) = F(h) \implies g = h.$$

■

Lause 3.13. Iga funktoori säilitab isomorfisme.

Tõestus. Kui $kf = 1_A$, kus $f : A \rightarrow B$ ja $k : B \rightarrow A$, siis $F(k)F(f) = F(1_A) = 1_{F(A)}$. See tõestab, et F säilitab nii koretraktsioonid kui ka retraktsioonid ning seega isomorfismid. ■

Lause 3.14. Täielik ja täpne funktoori peegeldab isomorfisme.

Tõestus. Oletame, et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on täielik ja täpne funktoori, $f : A \rightarrow A'$ on morfism kategoorias $\mathcal{A}$ ja $F(f) : F(A) \rightarrow F(A')$ on isomorfism kategoorias $\mathcal{B}$. Siis $F(f)s = 1_{F(A')}$ ja $sF(f) = 1_{F(A)}$ mingi morfismi $s : F(A') \rightarrow F(A)$ korral. Kuna F on täielik, siis $s = F(g)$ mingi $g : A' \rightarrow A$ korral. Siis

$$F(fg) = F(f)F(g) = 1_{F(A')} = F(1_{A'})$$

ja

$$F(gf) = F(g)F(f) = 1_{F(A)} = F(1_A),$$

millest tänu F täpsusele järelduvad võrdused $fg = 1_{A'}$ ja $gf = 1_A$. Seega f on isomorfism. ■

3.4. Komakategooriad

Lähtudes antud funktoori (või funktoorist), on võimalik konstrueerida uusi kategooriaid. Esitame siin mõned sellised konstruktsioonid.

Definitsioon 3.15. Olgu $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ ja $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ funktoori. **Komakategooria** $(F \downarrow G)$ (ehk (F, G)) defineeritakse järgmiselt.

1. $(F \downarrow G)$ objektid on kolmikud (A, f, B) , kus $A \in \mathcal{A}_0$, $B \in \mathcal{B}_0$ ja $f : F(A) \rightarrow G(B)$ on $\mathcal{C}$ morfism.
2. Morfism objektist (A, f, B) objekti (A', f', B') kategoorias $(F \downarrow G)$ on paar (a, b) , kus $a : A \rightarrow A'$ kategoorias $\mathcal{A}$, $b : B \rightarrow B'$ kategoorias $\mathcal{B}$ ja $f'F(a) = G(b)f$.
3. Komponeerimine kategoorias $(F \downarrow G)$ on indutseeritud $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ komponeerimiste poolt, see tähendab, et

$$(a', b')(a, b) = (a'a, b'b).$$

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{F(a)} & F(A') & \xrightarrow{F(a')} & F(A'') \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f'' \\ G(B) & \xrightarrow{G(b)} & G(B') & \xrightarrow{G(b')} & G(B'') \end{array}$$

Näide 3.16. Võtame eelmises definitsioonis $\mathcal{A} = \mathbf{1}$, s.o. diskreetse kategooria üheainsa objektiga $\star$, ning olgu $C \in \mathcal{C}_0$. Siis objekti C võib vaadelda kui konstantset funktoori $\Delta_C : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$, $\star \mapsto C$. Võttes $F = \Delta_C$ saame kategooria $(\Delta_C \downarrow G)$, kus objektid on kolmikud $(\star, f, B)$, kus $B \in \mathcal{B}_0$ ja $f : C \rightarrow G(B)$, ning morfismid $(\star, f, B) \rightarrow (\star, f', B')$ on paarid $(1_\star, b)$ kus $b : B \rightarrow B'$ on selline, et $f' = f'\Delta_C(1_\star) = G(b)f$. Ilmselt on see kategooria isomorfne kategooriaga, mille objektid on paarid (f, B) , kus $B \in \mathcal{B}_0$, $f : C \rightarrow$

$G(B)$, ning kus morfismid $(f, B) \rightarrow (f', B')$ on sellised $\mathcal{B}$ morfismid $b : B \rightarrow B'$, et $f' = G(b)f$. Tähistame viimase kategooria sümboliga $(C \downarrow G)$ ja nimetame seda objekti C **G -aluste objektide kategooriaks**.

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ f \swarrow & & \searrow f' \\ G(B) & \xrightarrow{G(b)} & G(B') \end{array}$$

Kui võtame veel $G = 1_C$ (kategooria $\mathcal{C}$ ühikfunktor), saame täpselt C -aluste objektide kategooria $(C \downarrow 1_C) = (C \downarrow \mathcal{C})$ (vt. definitsiooni 1.11). Analoogiliselt võib saada C F -üleste objektide kategooria ja C -üleste objektide kategooria.

Näide 3.17. Olgu $\mathcal{A} = \mathbf{1}$, $F = \Delta_{\{*\}} : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{Set}$ konstantne funktor, mis on defineeritud võrdusega $\Delta_{\{*\}}(\star) = \{*\}$, ning olgu $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Set}$ suvaline funktor. Siis komakategooria $(\Delta_{\{*\}} \downarrow G)$ objektid on kolmikud $(\star, f, B)$, kus $B \in \mathcal{B}_0$ ja $f : \{*\} \rightarrow G(B)$ on kujutused. Iga sellise kujutuse võib samastada hulga $G(B)$ elemendiga $f(*)$. Morfism

$$(1_\star, b) : (\star, f, B) \longrightarrow (\star, f', B')$$

peab muutma diagrammi

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{1_{\{*\}}} & \{*\} \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ G(B) & \xrightarrow{G(b)} & G(B') \end{array}$$

kommutatiivseks. Sellist komakategooriat nimetatakse G **elementide kategooriaks** ja tähistatakse $\text{el}(G)$.

Tähistust veidi muutes võib öelda, et funktori $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Set}$ elementide kategooria konstrueeritakse järgmiselt.

1. $\text{el}(G)$ objektid on paarid (b, B) , kus $b \in G(B)$.
2. Morfism $h : (b, B) \rightarrow (b', B')$ on selline morfism $h : B \rightarrow B'$, et $G(h)(b) = b'$.
3. $\text{el}(G)$ komponeerimine on indutseeritud $\mathcal{B}$ komponeerimise poolt.

Järgnevalt vaatleme endofunktori algebrate konstruksiooni. (Funktorit $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ nimetatakse kategooria $\mathcal{A}$ **endofunktoriks**.) See on sisuliselt komakategooria erijuht, kus $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ on suvaline funktor ja $G = 1_{\mathcal{A}}$ on kategooria $\mathcal{A}$ ühikfunktor.

Definitsioon 3.18. Endofunktori $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ algebrate (lühidalt: F -algebrate) **kategooria** $\text{Alg}(F)$ konstrueeritakse järgmiselt.

1. Objektid on paarid (A, f^A) , kus $f^A : F(A) \rightarrow A$.
2. Morfism $\varphi : (A, f^A) \rightarrow (A', f^{A'})$ on selline $\mathcal{A}$ morfism $\varphi : A \rightarrow A'$, et $f^{A'} F(\varphi) = \varphi f^A$.
3. $\text{Alg}(F)$ komponeerimine on indutseeritud $\mathcal{A}$ komponeerimise poolt.

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(A') & \xrightarrow{F(\psi)} & F(A'') \\ f^A \downarrow & & f^{A'} \downarrow & & \downarrow f^{A''} \\ A & \xrightarrow{\varphi} & A' & \xrightarrow{\psi} & A'' \end{array}$$

Näide 3.19. Traditsionaalselt vaadeldakse universaalalgebrat $(A, (f_i)_{i \in I})$ kui hulka A , millel on antud teatud algebralised tehted $f_i^A : A^{n_i} \rightarrow A$, kus $n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tehted võib kokku võtta üheks kujutuseks $f^A : \bigsqcup_{i \in I} A^{n_i} \rightarrow A$, nii et universaalalgebra on antud hulga A ja kujutusega $f^A : F(A) \rightarrow A$, kus kategooria $\mathbf{Set}$ endofunktor F on objektidel defineeritud võrdusega

$$F(X) := \bigsqcup_{i \in I} X^{n_i}$$

ja iga kujutuse $f : X \rightarrow Y$ korral kujutus $F(f) : \bigsqcup_{i \in I} X^{n_i} \rightarrow \bigsqcup_{i \in I} Y^{n_i}$ on defineeritud võrdusega

$$F(f)(x_1, \dots, x_{n_i}) := (f(x_1), \dots, f(x_{n_i})),$$

kus $(x_1, \dots, x_{n_i}) \in X^{n_i}$. Näiteks rühma võib vaadelda kui $\mathbf{Set}$ -endofunktori F -algebrat, kus $F(X) = X^0 \sqcup X^1 \sqcup X^2$. Saab näidata, et kui (A, f^A) ja (B, f^B) on kaks sama tüüpi algebrat, siis kujutus $\varphi : A \rightarrow B$ on algebrate homomorfism parajasti siis, kui järgmine diagramm kommuteerub:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(B) \\ f^A \downarrow & & \downarrow f^B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

Teoreetilises arvutiteaduses on eriti kasulikuks osutunud endofunktori algebratega duaalsed koalgebrad. Nende kategooria on sisuliselt komakategooria $(1_{\mathcal{A}} \downarrow F)$.

Definitsioon 3.20. Endofunktori $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ koalgebrate (lühidalt: F -koalgebrate) kategooria $\mathbf{Coalg}(F)$ konstrueeritakse järgmiselt.

1. Objektid on paarid (A, α_A) , kus $\alpha_A : A \rightarrow F(A)$. (Kui $\mathcal{A} = \mathbf{Set}$, nimetatakse kujutusi α_A koalgebra (A, α_A) **struktuurikujutusteks**.)
2. Morfism $\varphi : (A, \alpha_A) \rightarrow (A', \alpha_{A'})$ on selline $\mathcal{A}$ morfism $\varphi : A \rightarrow A'$, et $F(\varphi)\alpha_A = \alpha_{A'}\varphi$.
3. $\mathbf{Coalg}(F)$ komponeerimine on indutseeritud $\mathcal{A}$ komponeerimise poolt.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A' \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_{A'} \\ F(A) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(A') \end{array}$$

Näide 3.21. Lõplikke ja lõpmatuid Σ -liste (Σ on mingi hulk) võib modelleerida kui funktori $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ koalgebraid, kus F on defineeritud võrdusega

$$F(X) := \{*\} \sqcup (\Sigma \times X).$$

Hulga Σ elementide kõigi lõplike ja lõpmatute listide hulgal Σ^∞ defineeritakse struktuurikujutused $\alpha_{\Sigma^\infty} : \Sigma^\infty \rightarrow \{*\} \sqcup (\Sigma \times \Sigma^\infty)$ võrdusega

$$\alpha_{\Sigma^\infty}(\sigma) := \begin{cases} *, & \text{kui } \sigma \text{ on tühi list,} \\ (\text{head}(\sigma), \text{tail}(\sigma)), & \text{kui } \sigma \text{ on mittetühi list.} \end{cases}$$

Siin $\text{head}(\sigma)$ all mõistetakse listi esimest elementi ja $\text{tail}(\sigma)$ moodustavad listi kõik ülejäänud elemendid.

Näide 3.22. Mittetühje binaarpuid, mille lehed on tüüpi Σ , võib modelleerida kui funktori $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ koalgebraid, kus F on defineeritud võrdusega

$$F(X) := \Sigma \sqcup (X \times X).$$

Kõigi selliste puude hulgal T võib struktuurikujutused $\alpha_T : T \rightarrow \Sigma \sqcup (T \times T)$ defineerida võrdusega

$$\alpha_T(t) := \begin{cases} t \in \Sigma, & \text{kui } t \text{ on leht,} \\ (\text{left}(t), \text{right}(t)), & \text{kui } t \text{ ei ole a leht.} \end{cases}$$

Siin $\text{left}(t)$ on tipu t vasakpoolne alampuu ja $\text{right}(t)$ on tipu t parempoolne alampuu.

Näide 3.23. Olgu andmetüüpe $A = \text{PANGAKONTO}$ ja $\mathbb{Q}$ jaoks antud operatsioonid **rahasisse** ja **kontojääk**:

$$\begin{aligned}\text{rahasisse} &: A \times \mathbb{Q} \rightarrow A, \\ \text{kontojääk} &: A \rightarrow \mathbb{Q}.\end{aligned}$$

Pangakonto tüüp koos nende operatsioonidega tekitab funktori $F(X) = X^{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$ koalgebra (A, α) , kus struktuurikujutusel $\alpha_A : A \rightarrow A^{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$ on kuju

$$\alpha_A(a) = (\text{rahasisse}(a, -), \text{kontojääk}(a)).$$

Näide 3.24. Deterministlikke automaate võib vaadelda koalgebratena. Fikseeritud hulga Σ jaoks vaatleme kovariantset mor-funktorit $F = \text{Set}(\Sigma, -) = (-)^{\Sigma} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$. F -koalgebra olgu antud kujutusega $\alpha_A : A \rightarrow A^{\Sigma}$. Sellised kujutused on üksüheses vastavuses kujutustega $\delta_A : A \times \Sigma \rightarrow A$, see tähendab, deterministlike automaatidega, mille sisendtähestik on Σ , olekute hulk A ja üleminekufunktsioon δ_A , kui defineerime

$$\delta_A(a, \sigma) := \alpha_A(a)(\sigma).$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_B \\ A^{\Sigma} & \xrightarrow{F(\varphi)=\varphi \circ -} & B^{\Sigma} \end{array}$$

Kujutus $\varphi : A \rightarrow B$ on F -koalgebra homomorfism, kui $\varphi \alpha_A(a) = \alpha_B(\varphi(a))$, see tähendab, kui

$$\varphi(\delta_A(a, \sigma)) = \varphi(\alpha_A(a)(\sigma)) = (\varphi \alpha_A(a))(\sigma) = (\alpha_B(\varphi(a)))(\sigma) = \delta_B(\varphi(a), \sigma),$$

iga $a \in A$ ja $\sigma \in \Sigma$ korral. Võrdus $\varphi(\delta_A(a, \sigma)) = \delta_B(\varphi(a), \sigma)$ on täpselt see, millega defineeritakse automaatide homomorfism.

Ülesanded 3.25. 1. Konstrueerida funktor oma lemmikkategooriast mõnda teise kategooriasse või mõnest teisest kategooriast oma lemmikkategooriasse. Kas sellel funktoril on mõni hää omadus?

2. Tõestada, et funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on kategooriate isomorfism parajasti siis, kui ta on täielik, täpne ja indutseerib bijektsiooni $\mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ objektide klasside vahel.
3. Tõestada, et kategooriate isomorfism säilitab ja peegeldab monomorfisme ja epimorfisme.
4. Näidata, et kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ korrutist $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (vt. definitsiooni 1.10) võib vaadelda komakategooriana.

4. Loomulikud teisendused

4.1. Loomulike teisenduste definitsioon ja näited

Loomulikke teisendusi võib vaadelda kui funktoritevahelisi morfisme.

Definitsioon 4.1. Olgu $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ kaks kovariantset funktoori kategoorias $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$. **Loomulik teisendus** $\alpha : F \Rightarrow G$ funktoori F funktooris G on kategooria $\mathcal{B}$ morfismide süsteem $(\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A))_{A \in \mathcal{A}_0}$, mis on indekseeritud $\mathcal{A}$ objektide järgi, mille korral $\alpha_{A'} F(f) = G(f) \alpha_A$ kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $f : A \rightarrow A'$ korral, s.t. järgmine ruut on kommutatiivne:

$$\begin{array}{ccccc} A & & F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) \\ f \downarrow & & F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ A' & & F(A') & \xrightarrow{\alpha_{A'}} & G(A') \end{array} .$$

Morfismi α_A , kus $A \in \mathcal{A}_0$, nimetatakse loomuliku teisenduse $\alpha = (\alpha_A)_{A \in \mathcal{A}_0}$ **komponendiks** kohal A .

Definitsioon 4.2. Olgu $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ kaks kontravariantset funktoori kategoorias $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$. **Loomulik teisendus** $\alpha : F \Rightarrow G$ funktoori F funktooris G on kategooria $\mathcal{B}$ morfismide süsteem $(\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A))_{A \in \mathcal{A}_0}$, mis on indekseeritud $\mathcal{A}$ objektide järgi, mille korral $G(f) \alpha_{A'} = \alpha_A F(f)$ kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $f : A \rightarrow A'$ korral, s.t. järgmine ruut on kommutatiivne:

$$\begin{array}{ccccc} A & & F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) \\ f \downarrow & & F(f) \uparrow & & \uparrow G(f) \\ A' & & F(A') & \xrightarrow{\alpha_{A'}} & G(A') \end{array} .$$

Definitsioon 4.3. Loomulikku teisendust $\alpha : F \Rightarrow G$, kus $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, nimetatakse **loomulikuks isomorfismiks**, kui $\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$ on isomorfism kategoorias $\mathcal{B}$ iga $A \in \mathcal{A}_0$ korral. Funktooreid F ja G nimetatakse **loomulikult isomorfseteks** (tähistus: $F \cong G$), kui leidub loomulik isomorfism $F \Rightarrow G$.

Funktooreid $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ korral tähistame kõigi nende vaheliste loomulike teisenduste konglomeraati tähistega $\text{Nat}(F, G)$.

Näide 4.4. Iga funktoori $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ jaoks leidub selle funktoori **samasusteisendus** $1_F : F \Rightarrow F$, mis on defineeritud võrdusega

$$(1_F)_A := 1_{F(A)}$$

iga $A \in \mathcal{A}_0$ korral.

Näide 4.5. Olgu $f : B \rightarrow A$ fikseeritud morfism kategoorias $\mathcal{A}$. Definitsioon

$$\mathcal{A}(f, -)_C(g) := gf,$$

$g : A \rightarrow C$, annab loomuliku teisenduse $\mathcal{A}(f, -) : \mathcal{A}(A, -) \Rightarrow \mathcal{A}(B, -)$ objektide A ja B poolt tekitatud mor-funktoore vahel, sest kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $h : C \rightarrow C'$ korral $(hg)f = h(gf)$, s.t. järgmine ruut on kommutatiivne:

$$\begin{array}{ccccc} C & & \mathcal{A}(A, C) & \xrightarrow{\mathcal{A}(f, -)_C} & \mathcal{A}(B, C) \\ h \downarrow & & \downarrow \mathcal{A}(A, h) = h \circ - & & \downarrow \mathcal{A}(B, h) = h \circ - \\ C' & & \mathcal{A}(A, C') & \xrightarrow{\mathcal{A}(f, -)_{C'}} & \mathcal{A}(B, C') \end{array} .$$

Duaalselt, fikseeritud morfismi $f : A \rightarrow B$ korral kategoorias $\mathcal{A}$, definitsioon

$$\mathcal{A}(-, f)_C(g) := fg,$$

$g : C \rightarrow A$, annab loomuliku teisenduse $\mathcal{A}(-, f) : \mathcal{A}(-, A) \Rightarrow \mathcal{A}(-, B)$ kontravariantsete mor-funktoore vahel.

Näide 4.6. Fikseeritud korpuse K korral võime vaadelda kontravariantset mor-funktorit $\text{Vec}_K(-, K) : \text{Vec}_K \rightarrow \text{Set}$. On hästi teada, et vektorruumi V korral üle K saab lineaarkujutuste $V \rightarrow K$ (ehk lineaarsete funktsionaalide) hulka $\text{Vec}_K(V, K) = \text{Hom}(V, K) =: V^*$ vaadelda kui vektorruumi üle K punktiivisiliste tehete suhtes. Veelgi enam, kui $f : V \rightarrow U$ on lineaarkujutus, siis $\text{Vec}_K(-, K)(f) = - \circ f : U^* \rightarrow V^*$ on ka lineaarkujutus. Seega funktorit $\text{Vec}_K(-, K)$ võib vaadelda kui kontravariantset funktorit $\text{Vec}_K \rightarrow \text{Vec}_K$. Me tähistame seda funktorit lühidalt $(-)^*$. Funktori $(-)^*$ kompositsioon iseendaga on kovariantne funktor $\text{Vec}_K \rightarrow \text{Vec}_K$. Me tähistame seda $(-)^{**}$ ja nimetame **teise kaasruumi funktoriks**. Iga vektorruumi V korral defineerime kujutuse $\alpha_V : V \rightarrow V^{**} = \text{Hom}(\text{Hom}(V, K), K)$ võrdusega

$$(\alpha_V(a))(g) := g(a),$$

$a \in V, g \in \text{Hom}(V, K)$. Lineaaralgebrast on teada, et kujutused α_V on vektorruumide lineaarkujutused. Iga $f \in \text{Hom}(V, U)$, iga $a \in V$ ja iga $h \in \text{Hom}(U, K) = U^*$ korral

$$(f^{**}\alpha_V)(a)(h) = (\alpha_V(a)(- \circ f))(h) = \alpha_V(a)(hf) = (hf)(a) = h(f(a)) = \alpha_U(f(a))(h) = (\alpha_U f)(a)(h),$$

mis tõestab, et $\alpha = (\alpha_V)_{V \in (\text{Vec}_K)_0} : 1_{\text{Vec}_K} \Rightarrow (-)^{**}$ on loomulik teisendus.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha_V} & V^{**} \\ f \downarrow & & \downarrow - \circ (- \circ f) = f^{**} \\ U & \xrightarrow{\alpha_U} & U^{**} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & \alpha_U(f(a)) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ U^* & \xrightarrow{- \circ f} & V^* & \xrightarrow{\alpha_V(a)} & K \end{array}$$

Näide 4.7. Kui R^* on ühikelemendiga assotsiatiivse ringi R multiplikatiivne monoid ja $\text{Mat}_n(R)$ on kõigi n -ndat järku ruutmatriksite hulk üle R , mida vaatleme samuti multiplikatiivse monoidina, siis $\det_R : \text{Mat}_n(R) \rightarrow R^*, A \mapsto \det(A)$ on monoidide homomorfism. Veelgi enam, ruut

$$\begin{array}{ccc} \text{Mat}_n(R) & \xrightarrow{\det_R} & R^* \\ \text{Mat}_n(f) \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Mat}_n(S) & \xrightarrow{\det_S} & S^* \end{array}$$

kommuteerub iga ringide homomorfismi $f : R \rightarrow S$ korral (siin $\text{Mat}_n(f)$ rakendab kujutust f matriksi kõigile elementidele). See tähendab, et determinant on loomulik teisendus $\det : \text{Mat}_n \Rightarrow (-)^*$ funktorite $\text{Mat}_n, (-)^* : \text{Rng} \rightarrow \text{Mon}$ vahel.

Näide 4.8. Oletame, et mingis programmeerimiskeeles L (näiteks näite 1.6 keeles) on olemas konstruktor $(-)^*$, mis lubab iga andmetüübi A (s.t. konstantide hulga) abil konstrueerida uue tüübi A^* , mis on kõigi lõplike A -listide hulk. Näiteks kui $A = \{a, b\}$, siis listid $[a, b, a], [], [b, b, b, b]$ kuuluvad tüüpi A^* . Kui $f : A \rightarrow B$ on keele L operatsioon, siis f^* tähistab (tuletatud) operatsiooni $A^* \rightarrow B^*$, mis rakendab operatsiooni f antud A -listi kõigile elementidele (nt. $f^*([a, b, a]) = [f(a), f(b), f(a)] \in B^*$). On kerge näha, et $(-)^* : \mathcal{C}(L) \rightarrow \mathcal{C}(L)$ on keele L poolt indutseeritud kategooria $\mathcal{C}(L)$ endofunktor.

Tüübi A korral võib vaadelda hulka $(A^*)^* = A^{**}$, mis koosneb kõigi A -listide listidest; see on saadud funktori $(-)^*$ kahekordsel rakendamisel. Sellise tüübi A^{**} jaoks võib soovida omada **flatten**-operatsiooni, mis lihtsalt konkateneerib kõik listid listis. Näiteks

$$\text{flatten}([[a, b, a], [], [b, b, b, b]]) = [a, b, a, b, b, b].$$

Kõigi selliste **flatten**-operatsioonide süsteem on loomulik teisendus $(-)^{**} \Rightarrow (-)^*$, sest järgmine ruut kommuteerub iga operatsiooni $f : A \rightarrow B$ korral:

$$\begin{array}{ccc} A^{**} & \xrightarrow{\text{flatten}_A} & A^* \\ f^{**} \downarrow & & \downarrow f^* \\ B^{**} & \xrightarrow{\text{flatten}_B} & B^* \end{array}$$

4.2. Funktorite kvaasikategooriad

Lemma 4.9. Kui $F, G, H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on funktorid kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ ja $\alpha : F \Rightarrow G$, $\beta : G \Rightarrow H$ on loomulikud teisendused, siis võrdus

$$(\beta \circ \alpha)_A := \beta_A \alpha_A,$$

$A \in \mathcal{A}_0$, defineerib loomuliku teisenduse $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$.

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \Downarrow \alpha & \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{G} & \mathcal{B} \\ & \Downarrow \beta & \\ & H & \end{array}$$

Tõestus. Iga morfismi $f : A \rightarrow A'$ korral kategoorias $\mathcal{A}$

$$H(f)(\beta \circ \alpha)_A = H(f)\beta_A \alpha_A = \beta_{A'} G(f) \alpha_A = \beta_{A'} \alpha_{A'} F(f) = (\beta \circ \alpha)_{A'} F(f).$$

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) & \xrightarrow{\beta_A} & H(A) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) & & \downarrow H(f) \\ F(A') & \xrightarrow{\alpha_{A'}} & G(A') & \xrightarrow{\beta_{A'}} & H(A') \end{array}$$

■

Näide 4.10. Olgu $f : B \rightarrow A$ ja $g : C \rightarrow B$ morfismid kategoorias $\mathcal{A}$. Vaatleme loomulikke teisendusi $\mathcal{A}(f, -) : \mathcal{A}(A, -) \Rightarrow \mathcal{A}(B, -)$ ja $\mathcal{A}(g, -) : \mathcal{A}(B, -) \Rightarrow \mathcal{A}(C, -)$ (vt. näidet 4.5). Siis

$$(\mathcal{A}(g, -) \circ \mathcal{A}(f, -))_D(h) = (\mathcal{A}(g, -)_D \mathcal{A}(f, -)_D)(h) = \mathcal{A}(g, -)_D(hf) = (hf)g = h(fg) = \mathcal{A}(fg, -)_D(h)$$

iga morfismi $h : A \rightarrow D$ korral kategoorias $\mathcal{A}$. Järelikult

$$\mathcal{A}(g, -) \circ \mathcal{A}(f, -) = \mathcal{A}(fg, -).$$

Definitsioonist järeldub kergesti, et loomulike teisenduste komponeerimine $\circ$ on assotsiatiinne ja funktoorte samasusteisendused käituvad selle komponeerimise suhtes ühikelementidena. Seega võime moodustada **kõigi kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ viivate funktoorte kvaasikategooria** $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, kus morfismideks on loomulikud teisendused selliste funktoorte vahel. Kui $\mathcal{A}$ on väike, siis see kvaasikategooria on kategooria.

4.3. Yoneda Lemma

Teoreem 4.11 (Yoneda Lemma). 1. Olgu $F : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$ funktoori ja $A \in \mathcal{A}_0$. Leidub üksühene vastavus

$$\theta_{F,A} : \text{Nat}(\mathcal{A}(A, -), F) \longrightarrow F(A)$$

funktoorte $\mathcal{A}(A, -)$ ja F vaheliste loomulike teisenduste ja hulga $F(A)$ elementide vahel; muuhulgas neid loomulikke teisendusi on hulk.

2. Bijektsioonid $\theta_{F,A}$ tekitavad loomuliku teisenduse A suhtes.

3. Kui $\mathcal{A}$ on väike kategooria, siis bijektsioonid $\theta_{F,A}$ tekitavad loomuliku teisenduse ka F suhtes.

Tõestus. 1. Defineerime kujutused

$$\text{Nat}(\mathcal{A}(A, -), F) \xrightleftharpoons[\tau]{\theta_{F,A}} F(A)$$

võrdusega

$$\theta_{F,A}(\alpha) := \alpha_A(1_A)$$

iga loomuliku teisenduse $\alpha : \mathcal{A}(A, -) \Rightarrow F$ korral ja võrdusega

$$\tau(a)_B(f) := F(f)(a) \quad (1)$$

iga $a \in F(A)$, $B \in \mathcal{A}_0$ ja $f : A \rightarrow B$ korral. Peame kontrollima, et $\tau(a) = (\tau(a)_B)_{B \in \mathcal{A}_0}$ on loomulik teisendus $\mathcal{A}(A, -) \Rightarrow F$. Tõepoolest, mistahes morfismide $g : B \rightarrow C$ ja $f : A \rightarrow B$ korral kategoorias $\mathcal{A}$

$$(F(g)\tau(a)_B)(f) = F(g)(F(f)(a)) = F(gf)(a) = \tau(a)_C(gf) = (\tau(a)_C(g \circ -))(f).$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(A, B) & \xrightarrow{\tau(a)_B} & F(B) \\ \downarrow g \circ - & & \downarrow F(g) \\ \mathcal{A}(A, C) & \xrightarrow{\tau(a)_C} & F(C) \end{array}$$

Edasi, iga $a \in F(A)$ korral

$$(\theta_{F,A}\tau)(a) = \theta_{F,A}(\tau(a)) = \tau(a)_A(1_A) = F(1_A)(a) = 1_{F(A)}(a) = a,$$

mis tõestab, et $\theta_{F,A}\tau = 1_{F(A)}$. Teisest küljest, kui $\alpha : \mathcal{A}(A, -) \Rightarrow F$ on loomulik teisendus ja $f : A \rightarrow B$ on morfism kategoorias $\mathcal{A}$, siis

$$\begin{aligned} ((\tau\theta_{F,A})(\alpha))_B(f) &= (\tau(\theta_{F,A}(\alpha)))_B(f) = (\tau(\alpha_A(1_A)))_B(f) = F(f)(\alpha_A(1_A)) = (F(f)\alpha_A)(1_A) \\ &= (\alpha_B(f \circ -))(1_A) = \alpha_B(f1_A) = \alpha_B(f). \end{aligned}$$

Siin neljas võrdus järeldub α loomulikkusest, s.t. diagrammi

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(A, A) & \xrightarrow{\alpha_A} & F(A) \\ \downarrow f \circ - & & \downarrow F(f) \\ \mathcal{A}(A, B) & \xrightarrow{\alpha_B} & F(B) \end{array}$$

kommutatiivsusest. Seega $\tau\theta_{F,A}(\alpha) = \alpha$ iga α korral, mis tõestab, et $\tau\theta_{F,A} = 1_{\text{Nat}(\mathcal{A}(A, -), F)}$.

2. Olgu F fikseeritud funktor. Tõestame, et kujutuste süsteem $(\theta_{F,A})_{A \in \mathcal{A}_0}$ on loomulik teisendus. Selleks vaatleme funktoori $N : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$, mis on objektidel defineeritud võrdusega

$$N(A) := \text{Nat}(\mathcal{A}(A, -), F)$$

ja $\mathcal{A}$ morfismidel $f : A \rightarrow B$ on kujutused $N(f) : \text{Nat}(\mathcal{A}(A, -), F) \rightarrow \text{Nat}(\mathcal{A}(B, -), F)$ defineeritud võrdusega

$$N(f)(\alpha) := \alpha \circ \mathcal{A}(f, -),$$

kus $\mathcal{A}(f, -) : \mathcal{A}(B, -) \Rightarrow \mathcal{A}(A, -)$ (vt. näidet 4.5) ja $\alpha : \mathcal{A}(A, -) \Rightarrow F$. Ei ole raske veenduda, et N on tõesti funktor. Näitame, et definitsioon $\nu_A := \theta_{F,A}$, $A \in \mathcal{A}_0$, annab loomuliku teisenduse $\nu : N \Rightarrow F$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(\mathcal{A}(A, -), F) & \xrightarrow{\theta_{F,A}} & F(A) \\ \downarrow N(f) & & \downarrow F(f) \\ \text{Nat}(\mathcal{A}(B, -), F) & \xrightarrow{\theta_{F,B}} & F(B) \end{array}$$

Tõepoolest, iga morfismi $f : A \rightarrow B$ ja loomuliku teisenduse $\alpha : \mathcal{A}(A, -) \Rightarrow F$ korral

$$\begin{aligned} (F(f)\theta_{F,A})(\alpha) &= F(f)(\alpha_A(1_A)) = \alpha_B((f \circ -)(1_A)) = \alpha_B(f), \\ (\theta_{F,B}N(f))(\alpha) &= \theta_{F,B}(\alpha \circ \mathcal{A}(f, -)) = (\alpha \circ \mathcal{A}(f, -))_B(1_B) \\ &= \alpha_B(\mathcal{A}(f, -)_B(1_B)) = \alpha_B(1_B f) = \alpha_B(f). \end{aligned}$$

3. Kui $\mathcal{A}$ on väike kategooria, siis võime vaadelda kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathbf{Set}$ viivate funktoite kategooriat $\mathbf{Fun}(\mathcal{A}, \mathbf{Set})$. Fikseeritud objekti $A \in \mathcal{A}_0$ korral vaatleme seekord funktoit $M : \mathbf{Fun}(\mathcal{A}, \mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Set}$, mis on objektidel $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ defineeritud võrdusega

$$M(F) := \mathbf{Nat}(\mathcal{A}(A, -), F)$$

ja kui $\gamma : F \Rightarrow G$ on morfism kategoorias $\mathbf{Fun}(\mathcal{A}, \mathbf{Set})$, siis kujutused

$$M(\gamma) : \mathbf{Nat}(\mathcal{A}(A, -), F) \longrightarrow \mathbf{Nat}(\mathcal{A}(A, -), G)$$

on defineeritud võrdusega

$$M(\gamma)(\alpha) := \gamma \circ \alpha.$$

Teisest küljest, leidub “kohal A väärtustamise” funktoir $\mathbf{ev}_A : \mathbf{Fun}(\mathcal{A}, \mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Set}$, mis on defineeritud võrdusega

$$\begin{aligned} \mathbf{ev}_A(F) &:= F(A); \\ \mathbf{ev}_A(\gamma) &:= \gamma_A. \end{aligned}$$

Tuleb välja, et definitsioon $\mu_F := \theta_{F,A}$, kus $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$, annab loomuliku teisenduse $\mu : M \Rightarrow \mathbf{ev}_A$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Nat}(\mathcal{A}(A, -), F) & \xrightarrow{\theta_{F,A}} & F(A) \\ \downarrow \gamma \circ - = M(\gamma) & & \downarrow \gamma_A = \mathbf{ev}_A(\gamma) \\ \mathbf{Nat}(\mathcal{A}(A, -), G) & \xrightarrow{\theta_{G,A}} & G(A) \end{array}$$

Tõepoolest, mistahes loomulike teisenduste $\gamma : F \Rightarrow G$ ja $\alpha : \mathcal{A}(A, -) \Rightarrow F$ korral

$$(\gamma_A \theta_{F,A})(\alpha) = \gamma_A(\alpha_A(1_A)) = (\gamma_A \alpha_A)(1_A) = (\gamma \circ \alpha)_A(1_A) = \theta_{G,A}(\gamma \circ \alpha) = (\theta_{G,A}(\gamma \circ -))(\alpha).$$

■

Järeldus 4.12. Kui $A, B \in \mathcal{A}_0$, siis igal loomulikul teisendusel $\mathcal{A}(A, -) \Rightarrow \mathcal{A}(B, -)$ on kuju $\mathcal{A}(f, -)$ üheselt määratud morfismi $f : B \rightarrow A$ jaoks.

Tõestus. Vaatleme suvalist loomulikku teisendust $\alpha : \mathcal{A}(A, -) \Rightarrow \mathcal{A}(B, -)$. Rakendame Yoneda lemmat funktoiri $F = \mathcal{A}(B, -)$ korral. Yoneda lemma tõestusest teame, et võrdusega (1) defineeritud kujutused $\tau : \mathcal{A}(B, A) \longrightarrow \mathbf{Nat}(\mathcal{A}(A, -), \mathcal{A}(B, -))$ on bijektiivsed, seega leidub üheselt määratud morfism $f : B \rightarrow A$ nii, et $\alpha = \tau(f)$. Järelikult iga $C \in \mathcal{A}_0$ ja $g : A \rightarrow C$ korral

$$\alpha_C(g) = \tau(f)_C(g) = (\mathcal{A}(B, -)(g))(f) = (g \circ -)(f) = gf = \mathcal{A}(f, -)_C(g),$$

mis tähendab, et $\alpha = \mathcal{A}(f, -)$. ■

Kategooria $\mathcal{A}$ korral defineerime kujutuse $Y^{\text{op}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Fun}(\mathcal{A}, \mathbf{Set})$ võrdustega

$$\begin{aligned} Y^{\text{op}}(A) &:= \mathcal{A}(A, -), \\ Y^{\text{op}}(f) &:= \mathcal{A}(f, -) : \mathcal{A}(A, -) \Rightarrow \mathcal{A}(B, -) \end{aligned}$$

kus $f : B \rightarrow A$ kategoorias $\mathcal{A}$. Näite 4.10 põhjal $\mathcal{A}(fg, -) = \mathcal{A}(g, -) \circ \mathcal{A}(f, -)$, kui $f : B \rightarrow A$, $g : C \rightarrow B$ kategoorias $\mathcal{A}$, seega

$$Y^{\text{op}}(fg) = Y^{\text{op}}(g)Y^{\text{op}}(f), \quad Y^{\text{op}}(1_B) = 1_{Y^{\text{op}}(B)}. \quad (2)$$

Järelikult Y^{op} on kontravariantne funktoir. Seda funktoirit nimetatakse **kontravariantseks Yoneda sisestuseks**. Analoogiliselt saab defineerida kovariantse Yoneda sisestuse.

Lause 4.13. Yoneda sisestus on täielik ja täpne.

Tõestus. Peame näitama, et iga $A, B \in \mathcal{A}_0$ korral on kujutus

$$(Y^{\text{op}})_1^{B,A} : \mathcal{A}(B, A) \longrightarrow \mathbf{Fun}(\mathcal{A}, \mathbf{Set})(Y^{\text{op}}(A), Y^{\text{op}}(B)) = \mathbf{Nat}(\mathcal{A}(A, -), \mathcal{A}(B, -))$$

bijektiivne. Kuid nagu me nägime järelduses 4.12, $\tau(f) = \mathcal{A}(f, -) = Y^{\text{op}}(f)$ iga $f : B \rightarrow A$ korral. Seega Y^{op} on bijektiivne morfismidel sest τ on seda. ■

4.4. Loomulike teisenduste horisontaalne kompositsioon

Lisaks loomulike teisenduste niinimetatud **vertikaalsele kompositsioonile** $\circ$ on olemas veel teine viis loomulike teisenduste komponeerimiseks.

Lause 4.14. *Vaatleme järgmist olukorda:*

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{K} \end{array} \mathcal{C},$$

kus $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ on kategooriad, F, G, H, K on funktorid ja α, β on loomulikud teisendused. Võrdus

$$(\beta * \alpha)_A := \beta_{G(A)} H(\alpha_A) = K(\alpha_A) \beta_{F(A)} : (HF)(A) \rightarrow (KG)(A)$$

defineerib loomuliku teisenduse $\beta * \alpha : HF \Rightarrow KG$.

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{HF} \\ \Downarrow \beta * \alpha \\ \xrightarrow{KG} \end{array} \mathcal{C}$$

Tõestus. Kõigepäält paneme tähele, et tõepoolest $\beta_{G(A)} H(\alpha_A) = K(\alpha_A) \beta_{F(A)}$, sest β on loomulik teisendus:

$$\begin{array}{ccc} H(F(A)) & \xrightarrow{H(\alpha_A)} & H(G(A)) \\ \beta_{F(A)} \downarrow & & \downarrow \beta_{G(A)} \\ K(F(A)) & \xrightarrow{K(\alpha_A)} & K(G(A)) \end{array}.$$

Lisaks sellele on $\mathcal{A}$ iga morfismi $f : A \rightarrow A'$ korral välimine ristkülik diagrammis

$$\begin{array}{ccccc} (HF)(A) & \xrightarrow{H(\alpha_A)} & (HG)(A) & \xrightarrow{\beta_{G(A)}} & (KG)(A) \\ (HF)(f) \downarrow & & \downarrow (HG)(f) & & \downarrow (KG)(f) \\ (HF)(A') & \xrightarrow{H(\alpha_{A'})} & (HG)(A') & \xrightarrow{\beta_{G(A')}} & (KG)(A') \end{array}$$

kommutatiivne, sest vasakpoolne ruut kommuteerub α loomulikkuse ja H funktooriaalsuse tõttu ning parempoolne ruut kommuteerub β loomulikkuse tõttu. ■

Lauses 4.14 defineeritud kompositsiooni $*$ nimetatakse loomulike teisenduste α ja β **horisontaalseks kompositsiooniks** (mõnikord ka **Godement'i korrutiseks**).

Väga tihti kirjutatakse funktori F samasusteisenduse 1_F asemel sümbol F ise. Seega näiteks

$$(\beta * F)_A = \beta_{F(A)}, \quad (3)$$

$$(H * \alpha)_A = H(\alpha_A), \quad (4)$$

kus $\beta * F : HF \Rightarrow KF$ ja $H * \alpha : HF \Rightarrow HG$.

Ülesanded 4.15. 1. Tuletame meelde, et iga monoidi võib vaadelda kategooriana (vt. näidet 1.5).

Mis on funktorid selliste kategooriate vahel? Oletame, et A, B on rühmad, mida vaadeldakse üheobjektiliste kategooriatena, ja $f, g : A \rightarrow B$ on kaks funktoorit nende kategooriate vahel. Näidata, et loomulik teisendus $f \Rightarrow g$ leidub parajasti siis, kui f ja g on konjugeeritud, see tähendab, et

$$(\exists b \in B)(\forall a \in A)(f(a) = b^{-1}g(a)b).$$

2. Tõestada, et loomulik teisendus $\alpha : F \Rightarrow G$ on loomulik isomorfism parajasti siis, kui leidub a loomulik teisendus $\beta : G \Rightarrow F$ nii, et $\beta \circ \alpha = 1_F$ ja $\alpha \circ \beta = 1_G$. Teiste sõnadega: loomulikud isomorfismid on isomorfismid funktoorte kvaasikategoorias $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

3. Näidata, et Teoreemi 4.11 2. osas defineeritud N on funktor.

4. Fikseeritud objekti $A \in \mathcal{A}_0$ jaoks defineerime $\text{ev}_A : \text{Fun}(\mathcal{A}, \text{Set}) \rightarrow \text{Set}$ võrdusega

$$\begin{aligned}\text{ev}_A(F) &:= F(A), \\ \text{ev}_A(\gamma) &:= \gamma_A,\end{aligned}$$

$F, G : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}, \gamma : F \rightarrow G$. Tõestada, et ev_A on funktor.

5. Kategooria $\mathcal{A}$ korral vaatleme kvaasikategooriat $\text{Fun}(\mathcal{A}, \text{Set})$. Tõestada, et $\text{Fun}(\mathcal{A}, \text{Set})$ morfism α (s.t. loomulik teisendus) on monomorfism parajasti siis, kui iga komponent $\alpha_A, A \in \mathcal{A}_0$, on monomorfism kategoorias Set (s.t. injektiivne kujutus). (Näpunäide: kasutada Yoneda lemmat.)
6. Tõestada kompositsioonide $*$ ja $\circ$ vahetusreegel, s.t. tõestada, et võrdus

$$(\delta * \gamma) \circ (\beta * \alpha) = (\delta \circ \beta) * (\gamma \circ \alpha)$$

kehtib alati kui selle mõlemal poolel olevad kompositsioonid on defineeritud.

5. Piirid ja kopiirid

5.1. Korrutised ja kokorrutised

Kui A ja B on hulgad, siis nende otsekorrutis on

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Sellel korrutisel on kaks kanoonilist projektsiooni

$$\begin{aligned} p_A : A \times B &\rightarrow A, & (a, b) &\mapsto a, \\ p_B : A \times B &\rightarrow B, & (a, b) &\mapsto b. \end{aligned}$$

Veelgi enam, kui Q on hulk ja $f : Q \rightarrow A$, $g : Q \rightarrow B$ on suvalised kujutused, siis leidub üheselt määratud kujutus

$$m : Q \rightarrow A \times B, \quad q \mapsto (f(q), g(q)),$$

mis muudab järgmise diagrammi kommutatiivseks:

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ f \swarrow & \downarrow m & \searrow g \\ A & \xleftarrow{p_A} A \times B \xrightarrow{p_B} & B \end{array}$$

Sellest asjaolust on motiveeritud järgmine üldine definitsioon.

Definitsioon 5.1. Kategooria $\mathcal{C}$ objektide A, B **korrutis** on kolmik (P, p_A, p_B) , kus $P \in \mathcal{C}_0$ ja $p_A : P \rightarrow A$, $p_B : P \rightarrow B$ on morfismid kategoorias $\mathcal{C}$ (mida nimetatakse **projektsioonideks**), mis rahuldavad tingimust, et kui $Q \in \mathcal{C}_0$ on objekt ja $f : Q \rightarrow A$, $g : Q \rightarrow B$ on morfismid, siis leidub üheselt määratud morfism $m : Q \rightarrow P$ nii, et diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ f \swarrow & \downarrow m & \searrow g \\ A & \xleftarrow{p_A} P \xrightarrow{p_B} & B \end{array}$$

kommuteerub.

Harilikult kirjutatakse P asemel $A \times B$. Üheselt määratud m leidumise omadust kutsutakse tihti korrutiste **universaalomaduseks**. Morfismi m asemel kirjutatakse mõnikord $\langle f, g \rangle$.

Korrutise definitsiooni dualiseerimisel saadakse kokorrutise mõiste, mis üldistab hulkade lõikumatu ühendi konstruktsiooni.

Definitsioon 5.2. Kategooria $\mathcal{C}$ objektide A, B **kokorrutis** (ehk **summa**) on kolmik (P, u_A, u_B) , kus $P \in \mathcal{C}_0$ ja $u_A : A \rightarrow P$, $u_B : B \rightarrow P$ on kategooria $\mathcal{C}$ morfismid (mida nimetatakse **sisestusteks**), mis rahuldavad tingimust, et kui $Q \in \mathcal{C}_0$ on mistahes objekt ja $f : A \rightarrow Q$, $g : B \rightarrow Q$ on morfismid, siis leidub üheselt määratud morfism $m : P \rightarrow Q$ nii, et diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ f \nearrow & \uparrow m & \nwarrow g \\ A & \xrightarrow{u_A} P \xleftarrow{u_B} & B \end{array}$$

kommuteerub.

Harilikult kirjutatakse P asemel $A \coprod B$.

Korrutiste ja kokorrutiste definitsiooni võib üldistada mistahes arvu objektide jaoks.

Definitsioon 5.3. Olgu I hulk ja $(C_i)_{i \in I}$ kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteem. Selle süsteemi **korrutis** on paar $(P, (p_i)_{i \in I})$, mis rahuldab tingimusi:

1. P on $\mathcal{C}$ objekt;
2. iga $i \in I$ korral $p_i : P \rightarrow C_i$ on $\mathcal{C}$ morfism, mida nimetatakse P **projektsiooniks** objektile C_i ;
3. iga paari $(Q, (q_i)_{i \in I})$ jaoks, kus $Q \in \mathcal{C}_0$ ja $q_i : Q \rightarrow C_i$ iga $i \in I$ korral, leidub üheselt määratud morfism $m : Q \rightarrow P$ nii, et kolmnurk

$$\begin{array}{ccc} Q & & \\ \downarrow m & \searrow q_i & \\ P & \xrightarrow{p_i} & C_i \end{array}$$

kommuteerub iga $i \in I$ korral.

Harilikult kirjutatakse P asemel $\prod_{i \in I} C_i$.

Definitsioon 5.4. Olgu I hulk ja $(C_i)_{i \in I}$ kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteem. Selle süsteemi **kokorrutis** on paar $(P, (u_i)_{i \in I})$, mis rahuldab tingimusi:

1. P on $\mathcal{C}$ objekt;
2. iga $i \in I$ korral $u_i : C_i \rightarrow P$ on $\mathcal{C}$ morfism, mida nimetatakse C_i **sisestuseks** objekti P ;
3. iga paari $(Q, (q_i)_{i \in I})$ jaoks, kus $Q \in \mathcal{C}_0$ ja $q_i : C_i \rightarrow Q$ iga $i \in I$ korral, leidub üheselt määratud morfism $m : P \rightarrow Q$ nii, et kolmnurk

$$\begin{array}{ccc} Q & & \\ \uparrow m & \nwarrow q_i & \\ P & \xleftarrow{u_i} & C_i \end{array}$$

kommuteerub iga $i \in I$ korral.

Harilikult kirjutatakse P asemel $\prod_{i \in I} C_i$.

Tõestame korrutiste mõned omadused.

Lause 5.5. Kui $(P, (p_i)_{i \in I})$ on kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteemi $(C_i)_{i \in I}$ korrutis ja $h, k : C \rightarrow P$ on sellised morfismid, et iga $i \in I$ korral $p_i h = p_i k$, siis $h = k$.

Tõestus. Nii h kui ka k muudavad kõik kolmnurgad

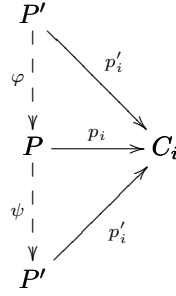
$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \downarrow h & \searrow p_i h & \\ P & \xrightarrow{p_i} & C_i \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C & & \\ \downarrow k & \searrow p_i k & \\ P & \xrightarrow{p_i} & C_i \end{array}$$

kommutatiivseks, seega peavad nad definitsiooni 5.3 põhjal võrdsed olema. ■

Lause 5.5 väidet võib sõnastada ka nii, et korrutise projektsioonid on korraga vasakult taandatavad.

Lause 5.6. Kui $(P, (p_i)_{i \in I})$ ja $(P', (p'_i)_{i \in I})$ on kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteemi $(C_i)_{i \in I}$ korrutised, siis P ja P' on isomorfsed.

Tõestus. Kuna P ja P' on objektide C_i , $i \in I$, korrutised siis leiduvad φ ja ψ , mis muudavad nii ülemise kui alumise kolmnurga diagrammis



kommutatiivseks iga $i \in I$ korral. Sellest, et

$$\begin{aligned} p'_i &= p_i \varphi = p'_i \psi \varphi, \\ p_i &= p'_i \psi = p_i \varphi \psi, \end{aligned}$$

iga $i \in I$ korral, jäeldub lause 5.5 põhjal, et $\psi \varphi = 1_{P'}$ ja $\varphi \psi = 1_P$. Seega $P \cong P'$. ■

Loomulikult kehtib ka duaalne väide kokorrutiste jaoks.

Ütleme, et kategoorias $\mathcal{C}$ on **(ko)korrutised**, kui igal $\mathcal{C}$ objektide süsteemil $(C_i)_{i \in I}$ on olemas (ko)korrutis. Ütleme, et kategoorias $\mathcal{C}$ on **lõplikud (ko)korrutised**, kui igal lõplikul objektide süsteemil on olemas (ko)korrutis.

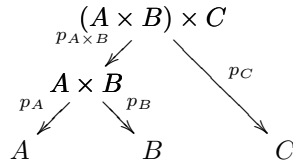
Lause 5.7. Kui kategoorias $\mathcal{C}$ on binaarsed korrutised (kõigi objektipaaride jaoks), siis on temas ka ternaarsed korrutised. Veelgi enam, iga $A, B, C \in \mathcal{C}_0$ korral

$$\begin{aligned} (A \times B) \times C &\cong A \times (B \times C), \\ A \times B &\cong B \times A, \end{aligned}$$

ja kui kategoorias $\mathcal{C}$ on lõppobjekt $\mathbf{1}$, siis

$$A \times \mathbf{1} \cong A, \quad \mathbf{1} \times A \cong A.$$

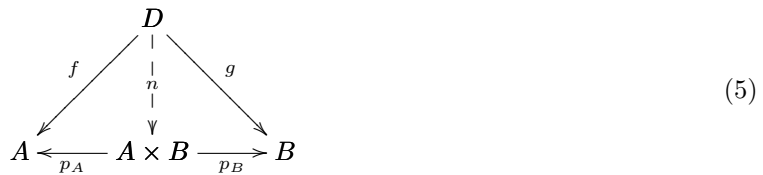
Tõestus. Objektide $A, B, C \in \mathcal{C}_0$ korral olgu $(A \times B, p_A, p_B)$ objektide A ja B korrutis ja olgu $((A \times B) \times C, p_{A \times B}, p_C)$ objektide $A \times B$ ja C korrutis.



Näitame, et $((A \times B) \times C, p_{A \times B}, p_C)$ on süsteemi (A, B, C) korrutis definitsiooni 5.3 mõttes. Universaalomaduse kontrollimiseks oletame, et mingi objekti D korral on olemas morfismid $f : D \rightarrow A$, $g : D \rightarrow B$ ja $h : D \rightarrow C$. Peame tõestama, et leidub üheselt määratud morfism $m : D \rightarrow (A \times B) \times C$ nii, et

1. $p_A p_{A \times B} m = f$,
2. $p_B p_{A \times B} m = g$,
3. $p_C m = h$.

Kõigepäält saame morfismide f ja g jaoks leida üheselt määratud morfismi $n : D \rightarrow A \times B$ nii, et diagramm



kommuteerub. See omakorda indutseerib üheselt määratud morfismi $m : D \rightarrow (A \times B) \times C$ nii, et diagramm

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ n \swarrow & \downarrow m & \searrow h \\ A \times B & \xleftarrow{p_{A \times B}} (A \times B) \times C & \xrightarrow{p_C} C \end{array} \quad (6)$$

on kommutatiivne. Seega $p_A p_{A \times B} m = p_A n = f$, $p_B p_{A \times B} m = p_B n = g$ ja $p_C m = h$.

Olgu $m' : D \rightarrow (A \times B) \times C$ veel üks morfism, mille korral $p_A p_{A \times B} m' = f$, $p_B p_{A \times B} m' = g$ ja $p_C m' = h$. Tänu n ühesusele diagrammis (5) kehtib võrdus $n = p_{A \times B} m'$. Järelikult ka $m = m'$, sest m diagrammis (6) on ühene.

Analoogiliselt saab tõestada, et ka $A \times (B \times C)$ on süsteemi (A, B, C) ternaarne korrutis. Seega $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$ lause 5.6 põhjal. Samuti on lihtne tõestada, et $A \times B \cong B \times A$.

Oletame nüüd, et kategoorias $\mathcal{C}$ leidub lõppobjekt $\mathbf{1}$ ja olgu iga $C \in \mathcal{C}_0$ korral t_C üheselt määratud morfism $C \rightarrow \mathbf{1}$. Näitame, et $(A, 1_A, t_A)$ on objektide A ja $\mathbf{1}$ korrutis. Tõepoolest, diagrammis

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ q \swarrow & \downarrow q & \searrow t_Q \\ A & \xleftarrow{1_A} A & \xrightarrow{t_A} \mathbf{1} \end{array}$$

vertikaalne q on üheselt määratud morfism, mis muudab mõlemad kolmnurgad kommutatiivseks. Lause 5.6 põhjal on paari $(A, \mathbf{1})$ korrutised $A \times \mathbf{1}$ ja A isomorfsed. Analoogiliselt $\mathbf{1} \times A \cong A$. ■

Selle tõestuse üldistus näitab, et kui kategoorias on binaarsed korrutised, siis on temas n objekti korrutised iga $n \geq 2$ korral. Samuti on lihtne näha, et tühja objektide süsteemi korrutis on lõppobjekt ja $(A, 1_A)$ on ühestainsast objektist A koosneva süsteemi korrutis. Seega kehtivad järgmised tulemused.

Lause 5.8. *Kategoorias on lõplikud korrutised parajasti siis, kui temas on binaarsed korrutised ja lõppobjekt.*

Lause 5.9. *Olgu $\mathcal{C}$ kategooria, kus on lõplikud korrutised ja algobjekt $\mathbf{0}$. Järgmised väited on samaväärsed.*

1. Iga objekti $A \in \mathcal{C}_0$ korral, kui leidub morfism $f : A \rightarrow \mathbf{0}$, siis $A \cong \mathbf{0}$.
2. Iga objekti $A \in \mathcal{C}_0$ korral $A \times \mathbf{0} \cong \mathbf{0}$.

Tõestus. Iga $C \in \mathcal{C}_0$ korral tähistame üheselt määratud morfismi $\mathbf{0} \rightarrow C$ sümboliga i_C .

Kui 1 kehtib, siis sellest, et $p_0 : A \times \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{0}$, järeldub, et $A \times \mathbf{0} \cong \mathbf{0}$.

Vastupidi, oletame et $(A \times \mathbf{0}, p_A, p_0)$ on objektide A ja $\mathbf{0}$ korrutis, $A \times \mathbf{0} \cong \mathbf{0}$ ja $f : A \rightarrow \mathbf{0}$ objekti $A \in \mathcal{C}_0$ korral. Siis $i_{A \times \mathbf{0}} : \mathbf{0} \rightarrow A \times \mathbf{0}$ peab olema isomorfism. Samuti leidub üheselt määratud $m : A \rightarrow A \times \mathbf{0}$ nii, et $p_0 m = f$ ja $p_A m = 1_A$.

$$\begin{array}{ccccc} & A & & & \\ & \downarrow 1_A & & \searrow f & \\ A & \xleftarrow{p_A} A \times \mathbf{0} & \xrightarrow{p_0} & \mathbf{0} & \\ & \uparrow i_{A \times \mathbf{0}} & & \uparrow 1_0 & \\ & \mathbf{0} & & & \end{array}$$

Et $\mathbf{0}$ on algobjekt ja $A \times \mathbf{0} \cong \mathbf{0}$, siis ka $A \times \mathbf{0}$ on algobjekt. Seega $i_{A \times \mathbf{0}} p_0 = 1_{A \times \mathbf{0}}$. Järelikult $i_A f = i_A p_0 m = p_A i_{A \times \mathbf{0}} p_0 m = p_A 1_{A \times \mathbf{0}} m = 1_A$, s.t. f on koretraktsioon. Kuna tema sihtobjekt on algobjekt, on ta ka epimorfism. Seega f on isomorfism (vt. ülesannet 2.41.1). ■

Kui kategooria $\mathcal{C}$ algobjektil $\mathbf{0}$ on lause 5.9 esimeses osas mainitud omadus, siis teda nimetatakse **rangeks algobjektiks**. Järjestatud hulga (mida vaadeldakse kategooriana) vähim element (kui ta leidub)

on range alobjekt. Kategoorias **Mon** on üheelemendiline monoid $\{1\}$ alobjekt, aga mitte range alobjekt, sest mittetriviaalse monoidi S korral $S \times \{1\} \cong S \not\cong \{1\}$.

Toome mõned korrutiste näited.

Näide 5.10. Kategoorias **Set** on süsteemi $(C_i)_{i \in I}$ korrutiseks otsekorrutis

$$\prod_{i \in I} C_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in C_i\}$$

koos projektsioonidega $p_k((x_i)_{i \in I}) = x_k, k \in I$.

Näide 5.11. Kvaasikategooria **CAT** objektide binaarsed korrutised on defineeritud definitsioonis 1.10. Projektsioonid on defineeritud eeskirjadega

$$\begin{aligned} P_A : \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{A}, & (A, B) &\mapsto A, & (a, b) &\mapsto a, \\ P_B : \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{B}, & (A, B) &\mapsto B, & (a, b) &\mapsto b, \end{aligned}$$

mis ilmselt annavad funktorid. Samamoodi võib defineerida suvalise kategooriate väikse süsteemi korrutise.

Näide 5.12. Algebraliste struktuuride kategooriates (nt. rühmad, Abeli rühmad, ringid, moodulid, vektorruumid, Boole'i algebrad jne.) on objektide süsteemi korrutis nende otsekorrutis, mis on varustatud komponenthaavaliste tehetega. Näiteks kui $C_i, i \in I$, on Abeli rühmad, siis $\prod_{i \in I} C_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in C_i\}$ ja liitmine hulgal $\prod_{i \in I} C_i$ on defineeritud võrdusega

$$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} := (x_i + y_i)_{i \in I}.$$

Näide 5.13. Kategoorias **Ban**₁ on süsteemi $(C_i)_{i \in I}$ korrutis antud võrdustega

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} C_i &= \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in C_i, \sup_{i \in I} \|x_i\| \leq \infty\}, \\ \|(x_i)_{i \in I}\| &:= \sup_{i \in I} \|x_i\| \end{aligned}$$

ja komponenthaavaliste tehetega. Projektsioonid $p_k : \prod_{i \in I} C_i \rightarrow C_k$ on ahendavad lineaarsed operaatorid, sest iga $k \in I$ korral $\|p_k((x_i)_{i \in I})\| = \|x_k\| \leq \sup_{i \in I} \|x_i\| = \|(x_i)_{i \in I}\|$. Olgu $q_i : Q \rightarrow C_i, i \in I$, samuti ahendavate operaatorite pere ja vaatleme elementi $x \in Q$. Siis $\|q_i(x)\| \leq \|x\|$ iga $i \in I$ korral. Seega $\sup_{i \in I} \|q_i(x)\| \leq \|x\|$ ja me võime defineerida kujutuse $m : Q \rightarrow \prod_{i \in I} C_i$ võrdusega

$$m(x) := (q_i(x))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} C_i.$$

Selline m on üheselt määratud ja ahendav operaator.

Näide 5.14. Kategoorias **Top** on süsteemi $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ korrutis topoloogiline ruum (X, τ) , kus $X = \prod_{i \in I} X_i$ on otsekorrutis ja topoloogia τ baas koosneb hulga X alamhulkadest, millel on kuju

$$\prod_{i \in I} U_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in U_i\} \subseteq X$$

kus $U_i \in \tau_i$ iga $i \in I$ korral ja hulk $\{i \in I \mid U_i \neq X_i\}$ on lõplik. Topoloogia τ ise koosneb kõigist baasi kuuluvate alamhulkade ühenditest. Projektsioonid $p_k : X \rightarrow X_k, (x_i)_{i \in I} \mapsto x_k$, on pidevad, sest kui $U \in \tau_k$, siis

$$p_k^{-1}(U) = \prod_{i \in I} V_i$$

kus $V_k = U$ ja $V_i = X_i$ iga $i \in I \setminus \{k\}$ korral.

Universaalomaduse kontrollimiseks olgu

$$q_i : (Y, \sigma) \rightarrow (X_i, \tau_i), \quad i \in I,$$

pidevate kujutuste süsteem. Näitame, et kujutus

$$m : Y \rightarrow X, \quad y \mapsto (q_i(y))_{i \in I}$$

on pidev. Kui $\prod_{i \in I} U_i$ kuulub τ baasi, siis

$$m^{-1} \left(\prod_{i \in I} U_i \right) = \{y \in Y \mid (\forall i \in I)(q_i(y) \in U_i)\} = \bigcap_{i \in I} q_i^{-1}(U_i). \quad (7)$$

Iga $i \in I$ korral $q_i^{-1}(U_i) \in \sigma$, sest q_i on pidev ja $U_i \in \tau_i$. Veelgi enam, kui $U_i = X_i$, siis $q_i^{-1}(U_i) = Y$ ja see liige ei mängi mingit rolli ühisosas (7). Seega

$$m^{-1} \left(\prod_{i \in I} U_i \right) = \bigcap_{i \in I, U_i \neq X_i} q_i^{-1}(U_i),$$

mis on Y lahtiste alamhulkade lõplik ühisosa ja seega lahtine alamhulk.

Näide 5.15. Kui me vaatleme järjestatud hulka $(P, \leq)$ kategooriana (vt. näidet 1.5), siis korrutised (kui nad leiduvad) on täpselt alumised rajad.

Näide 5.16. Selleks, et funktsionaalses programmeerimiskeeles (mida vaatlesime alajaotuses 1.3) lubada operatsioone, mis sõltuvad mitmest muutujast, on mõistlik eeldada, et mistahes tüüpide A ja B korral on keeles olemas kirjetüüp P koos kahe väljaselektoriga $P.A : P \rightarrow A$ ja $P.B : P \rightarrow B$, mis rahuldab universaalomadust. Näiteks kirjetüübil ISIK võivad olla väljad NIMI ja VANUS. Seega kirjekonstruktori olemasolu keeles L tähendaks, et vastavas kategoorias $\mathcal{C}(L)$ on olemas lõplikud korrutised.

Vaatleme kokorrutiste näiteid.

Näide 5.17. Kategoorias **Set** on süsteemi $(C_i)_{i \in I}$ kokorrutis sinna kuuluvate hulkade lõikumatu ühend. Selle lõikumatu ühendi võib konstrueerida kui hulga

$$\bigsqcup_{i \in I} C_i := \bigcup_{i \in I} (C_i \times \{i\}) = \{(x, i) \mid i \in I, x \in C_i\}.$$

Sisestused $u_i : C_i \rightarrow \bigsqcup_{i \in I} C_i$ on defineeritud võrdusega $u_i(x) := (x, i)$, $x \in C_i$.

Näide 5.18. Kvaasikategoorias **CAT** on kategooriate süsteemi kokorrutis sinna kuuluvate kategooriate lõikumatu ühend.

Näide 5.19. Kategoorias **Ab** on süsteemi $(A_i)_{i \in I}$ kokorrutiseks Abeli rühmade otsesumma

$$\prod_{i \in I} A_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in A_i, \text{ hulk } \{i \in I \mid x_i \neq 0\} \text{ on lõplik}\} \leq \prod_{i \in I} A_i,$$

kus liitmine on defineeritud komponenthaaval. Sisestused $u_k : A_k \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ on defineeritud võrdusega $u_k(x) := (x_i)_{i \in I}$, kus $x_k = x$ ja kõik teised komponendid on nullid. Kui B on teine Abeli rühm ja $q_i : A_i \rightarrow B$, $i \in I$, on rühmade homomorfismide süsteem, siis üheselt määratud kujutused $m : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow B$ on defineeritud võrdusega $m((x_i)_{i \in I}) := \sum_{i \in I} q_i(x_i)$, kus viimane summa on tegelikult lõpliku arvu nullist erinevate elementide summa.

Näide 5.20. Kategoorias **Gr** konstrueeritakse süsteemi $(G_i)_{i \in I}$ kokorrutis järgmiselt. Olgu V hulkade G_i lõikumatu ühend ja olgu V^* vaba monoid baasiga V , s.t. kõigi V elementide lõplike jadade ("sõnade") hulk koos konkatenatsioonioperatsiooniga. Muuhulgas sisaldab V^* tühja jada. Vaatleme hulgal V^* ekvivalentsiseost σ , mis on tekitatud järgmiste reeglite poolt:

- iga rühma G_i ühikelemendist koosnev 1-elementiline jada on ekvivalentne tühja jadaga,
- jada, mis sisaldab kaks järjestikkust samasse hulka G_i kuuluvat elementi, on ekvivalentne jadaga, mis saadakse sellest nende kahe elemendi asendamisel nende korrutisega rühmas G_i .

Seos σ osutub kongruentsiks ja faktormonoid

$$\prod_{i \in I} G_i := V^* / \sigma$$

on rühm, kus $[v_1 \dots v_n]_{\sigma}^{-1} = [v_n^{-1} \dots v_1^{-1}]_{\sigma}$, $v_1, \dots, v_n \in V$. Kujutused

$$u_i : G_i \rightarrow \prod_{i \in I} G_i, \quad x \mapsto [x]_{\sigma},$$

on rühmade homomorfismid ja saab näidata, et $\prod_{i \in I} G_i$ on tõepoolest rühmade $G_i, i \in I$ kokorrutis. Rühmateoorias kutsutakse seda kokorrutist $\prod_{i \in I} G_i$ harilikult **rühmade** $G_i, i \in I$, **vabakorrutiseks**.

Näide 5.21. Kategoorias **Top** on süsteemi $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ kokorrutiseks (X, τ) , kus X on hulkade X_i lõikumatu ühend ja τ on topoloogia hulgal X , mis on tekitatud topoloogiate τ_i lõikumatu ühendi poolt.

Näide 5.22. Kui vaatleme järjestatud hulka $(P, \leq)$ kategooriana (vt. näidet 1.5), siis kokorrutised (kui nad leiduvad) on ülemised rajad.

5.2. Võrdsustajad ja kovõrdsustajad

Definitsioon 5.23. Olgu $f, g : A \rightarrow B$ morfismid kategoorias $\mathcal{C}$. Morfismide f ja g **võrdsustaja** on paar (E, e) , mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $e : E \rightarrow A$ on morfism kategoorias $\mathcal{C}$;
2. $fe = ge$;
3. iga $\mathcal{C}$ morfismi $e' : E' \rightarrow A$ korral, mis rahuldab tingimust $fe' = ge'$, leidub üheselt määratud morfism $k : E' \rightarrow E$ nii, et $ek = e'$.

Lühidalt kirjutatakse $(E, e) \approx \text{Eq}(f, g)$.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \xrightarrow[f]{g} & B \\ & \nwarrow k & \nearrow e' & & \\ & & E' & & \end{array}$$

Definitsioon 5.24. Olgu $f, g : A \rightarrow B$ morfismid kategoorias $\mathcal{C}$. Morfismide f ja g **kovõrdsustaja** on paar (C, c) , mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $c : B \rightarrow C$ on morfism kategoorias $\mathcal{C}$;
2. $cf = cg$;
3. iga $\mathcal{C}$ morfismi $c' : B \rightarrow C'$ korral, mis rahuldab tingimust $c'f = c'g$, leidub üheselt määratud morfism $k : C \rightarrow C'$ nii, et $kc = c'$.

Lühidalt kirjutatakse $(C, c) \approx \text{Coeq}(f, g)$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow[f]{g} & B & \xrightarrow{c} & C \\ & & \searrow c' & \nearrow k & \\ & & C' & & \end{array}$$

Lause 5.25. Kahe morfismi võrdsustaja, kui ta leidub, on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud.

Tõestus. Oletame, et nii (E, e) kui ka (E', e') on $f, g : A \rightarrow B$ võrdsustajad. Siis leiduvad sellised $k : E' \rightarrow E$ ja $l : E \rightarrow E'$, et $ek = e'$ ja $e'l = e$.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \xrightarrow[f]{g} & B \\ & \nwarrow k & \nearrow e' & & \\ & & E' & & \end{array}$$

Kuna nii 1_E kui ka kl muudavad kolmnurgad

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e} & A \\ \uparrow 1_E & \nearrow kl & \uparrow e \\ E & & E \end{array}$$

kommutatiivseks, siis peavad nad olema võrdsed. Samamoodi $lk = 1_{E'}$, mis tõestab, et $E \cong E'$. ■

Lause 5.26. Kui (E, e) on morfismide $f, g : A \rightarrow B$ võrdsustaja kategoorias $\mathcal{C}$, siis e on monomorfism.

Tõestus. Oletame, et $ek = el$, kus $k, l : E' \rightarrow E$. Siis $k = l$, sest leidub täpselt üks morfism, mis muudab alljärgnevas diagrammis kolmnurgad kommutatiivseks.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \xrightarrow{f} & B \\ & \nwarrow k & \nearrow ek & \searrow g & \\ & E' & & & \end{array}$$

■

Näide 5.27. Enamuses konkreetsetes kategooriates ($\mathbf{Set}$, $\mathbf{Top}$, $\mathbf{Gr}$, $\mathbf{Ab}$, $\mathbf{Ban}_1$, ...) saab morfismide $f, g : A \rightarrow B$ võrdsustaja anda võrdusega

$$E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}, \quad (8)$$

kusjuures E struktuur on indutseeritud A struktuuri poolt ja kujutus $e : E \rightarrow A$ on sisestus.

Näiteks kategoorias $\mathbf{Set}$ on kujutuste $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = 1$ võrdsustaja, ringjoon $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Kategoorias $\mathbf{Ab}$ on $f, g : A \rightarrow B$ võrdsustaja defineeritud võrdusega (8). See võrdsustaja on homomorfismi $f - g : A \rightarrow B$ tuum.

Näide 5.28. Mittetühjade hulkade (või mittetühjade poolrühmade) kategoorias on olemas paralleelseid morfisme, millel ei ole võrdsustajat.

Näide 5.29. Kategoorias $\mathbf{Set}$ on kujutuste $f, g : A \rightarrow B$ kovõrdsustaja faktorhulk B/σ koos loomuliku sürjektsiooniga $\pi : B \rightarrow B/\sigma$, kus σ on paaride hulga $\{(f(a), g(a)) \mid a \in A\}$ poolt tekitatud ekvivalentsi- seos hulgal B .

Näide 5.30. Kategoorias $\mathbf{Ab}$ on homomorfismi $f : A \rightarrow B$ ja nullhomomorfismi kovõrdsustajaks loomulik sürjektsioon $\pi : B \rightarrow B/f(A)$ faktorhulmale $B/f(A)$. Üldisemalt on homomorfismide $f, g : A \rightarrow B$ kovõrdsustajaks homomorfismi $f - g : A \rightarrow B$ ja nullhomomorfismi kovõrdsustaja, see tähendab loomulik sürjektsioon $B \rightarrow B/(f - g)(A)$. Kovõrdsustajate kirjeldused kategooriates $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ ja $\mathbf{Mod}_R$ on analoogilised.

Näide 5.31. Paljude algebraliste struktuuride (nt. rühmad, ringid) kategooriates on olukord keerulisem. Üldiselt tuleb homomorfismide $f, g : A \rightarrow B$ kovõrdsustaja konstrueerimiseks faktoriseerida B hulga $\{(f(a), g(a)) \mid a \in A\}$ poolt tekitatud kongruentsi järgi.

Näide 5.32. Kui $f, g : (X, \tau) \rightarrow (Y, \theta)$ on pidevad kujutused kategoorias $\mathbf{Top}$, siis nende kovõrdsustaja on $(Y/\sigma, \theta')$, kus σ on hulga $\{(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$ poolt tekitatud ekvivalentsiseos ja θ' on faktortopoloogia, s.t.

$$\theta' = \{V \subseteq Y/\sigma \mid \pi^{-1}(V) \in \theta\},$$

kus $\pi : Y \rightarrow Y/\sigma$ on loomulik sürjektsioon.

Üks võimalus on mõelda võrdsustajast kui suurimast alamobjektist, millel kehtib mingi samasus või samasuste hulk. Kovõrdsustaja on vähim samastamine, mis on vaja teha, et samasused kehtiks ekvivalentsikalssidel. Järgnev näide illustreerib seda.

Näide 5.33. On kaks võimalust defineerida ratsionaalarve. Esimeses konstruktsioonis samastatakse mur- rud $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ parajasti siis, kui $a \cdot d = b \cdot c$. Seda võib kirjeldada kui kovõrdsustajat

$$T \xrightarrow[g]{f} \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\pi} (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\sigma = \mathbb{Q},$$

kus

$$T = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid ad = bc\},$$

$f(a, b, c, d) = (a, b)$, $g(a, b, c, d) = (c, d)$, σ konstrueeritakse kanooniliselt nagu näites 5.29 ja tähistatakse $\frac{a}{b} := [(a, b)]_{\sigma}$.

Teine viis on defineerida ratsionaalarvud paaridena $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, kus a ja b on ühistegurita. Selliste paaride hulk on võrdsustaja

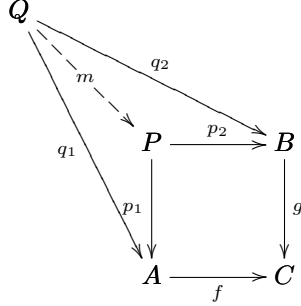
$$\mathbb{Q} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid \text{SÜT}(a, b) = 1\} \xrightarrow{e} \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \xrightarrow[\text{const}_1]{\text{SÜT}} \mathbb{N},$$

kus e on sisestus ja const_1 on konstantne kujutus arvule 1.

5.3. Tagasitõmbajad ja väljatõukajad

Definitsioon 5.34. Olgu $f : A \rightarrow C$ ja $g : B \rightarrow C$ kaks morfismi kategoorias $\mathcal{C}$, millel on sama sihtobjekt. Morfismide f ja g **tagasitõmbaja** on kolmik (P, p_1, p_2) , mis rahuldab tingimusi:

1. $p_1 : P \rightarrow A$ ja $p_2 : P \rightarrow B$ on morfismid kategoorias $\mathcal{C}$;
2. $fp_1 = gp_2$;
3. kui $q_1 : Q \rightarrow A$ ja $q_2 : Q \rightarrow B$ on sellised $\mathcal{C}$ morfismid, et $f q_1 = g q_2$, siis leidub üheselt määratud morfism $m : Q \rightarrow P$ nii, et $p_1 m = q_1$ ja $p_2 m = q_2$.



Ruutu eelmises diagrammis nimetatakse **konservatiivseks ruuduks** ehk tagasitõmbamisruuduks. Lühidalt kirjutatakse $(P, p_1, p_2) \approx \text{Pb}(f, g)$.

“Tagasitõmbaja” duaalne mõiste on “**väljatõukaja**”.

Näide 5.35. Kategoorias Set on kujutuste $f : A \rightarrow C$ ja $g : B \rightarrow C$ tagasitõmbaja kolmik (P, p_1, p_2) , kus

$$P = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\} \subseteq A \times B$$

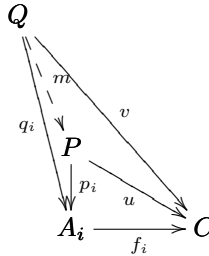
ja $p_1(a, b) = a$, $p_2(a, b) = b$ iga $(a, b) \in P$ korral.

Kui A ja B on C alamhulgad ja f, g on sisestused, siis P on isomorfne ühisosaga $A \cap B$.

Sarnane konservatiivsete ruutude konstruktsioon töötab paljudes kategooriates (nt. Gr , Mod_R , Rng , Top) kui P varustatada korrutise $A \times B$ poolt indutseeritud struktuuriga.

Definitsioon 5.36. Olgu I hulk ja $f_i : A_i \rightarrow C$, $i \in I$, kategooria $\mathcal{C}$ morfismide süsteem. Morfismide f_i **hulgitagasitõmbaja** on paar $(P, (p_i)_{i \in I})$, mis rahuldab tingimusi:

1. $p_i : P \rightarrow A_i$ on morfism kategoorias $\mathcal{C}$ iga $i \in I$ korral;
2. leidub morfism $u : P \rightarrow C$ nii, et $f_i p_i = u$ iga $i \in I$ korral;
3. kui $q_i : Q \rightarrow A_i$, $i \in I$, ja $v : Q \rightarrow C$ on sellised $\mathcal{C}$ morfismid, et $f_i q_i = v$ iga $i \in I$ korral, siis leidub üheselt määratud morfism $m : Q \rightarrow P$ kategoorias $\mathcal{C}$ nii, et $p_i m = q_i$ iga $i \in I$ korral.



Osutub, et lõppobjekti olemasolu korral on korrutised teatud hulgitagasitõmbajad.

Lause 5.37. Olgu $\mathbf{1}$ kategooria $\mathcal{C}$ lõppobjekt. Siis $(P, (p_i)_{i \in I})$ on objektide A_i , $i \in I$, korrutis parajasti siis, kui $(P, (p_i)_{i \in I})$ on (üheselt määratud) morfismide $f_i : A_i \rightarrow \mathbf{1}$, $i \in I$, hulgitagasitõmbaja.

Tõestus. Tarvilikkus on ilmne.

Piisavus. Olgu $(P, (p_i)_{i \in I})$ morfismide $f_i : A_i \rightarrow \mathbf{1}$, $i \in I$, hulgitagasiõmbaja ning olgu antud morfismid $q_i : Q \rightarrow A_i$, $i \in I$. Et $\mathbf{1}$ on lõppobjekt, siis leidub täpselt üks morfism $v : Q \rightarrow \mathbf{1}$. Järelikult $f_i q_i = v$ iga $i \in I$ korral. Eelduse põhjal leidub üheselt määratud morfism $m : Q \rightarrow P$ nii, et $p_i m = q_i$ iga $i \in I$ korral. ■

Järeldus 5.38. Kui kategoorias on lõppobjekt ja hulgitagasiõmbajad, siis selles kategoorias on korrutised.

Lause 5.39. Kui ruudud (I) ja (II) diagrammis

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C \\ c \downarrow & (I) & d \downarrow & (II) & e \downarrow \\ D & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & F \end{array}$$

on konservatiivsed ruudud, siis ka välimine ristkülik on konservatiivne ruut.

Tõestus. Olgu (I) ja (II) konservatiivsed ruudud ja $q : Q \rightarrow D$, $r : Q \rightarrow C$ sellised, et $gfq = er$. Siis leidub üheselt määratud $n : Q \rightarrow B$ nii, et $bn = r$ ja $dn = fq$. Kasutades seda, et (I) on konservatiivne ruut, saame leida üheselt määratud $m : Q \rightarrow A$ nii, et $cm = q$ ja $am = n$. Järelikult $bam = bn = r$. Kui ka $m' : Q \rightarrow A$ on selline, et $bam' = r$ ja $cm' = q$, siis $b(am) = r = b(am')$ ja $d(am) = dn = fq = fcm' = d(am')$, kust $am = am'$ tänu sellele, et (II) on konservatiivne ruut. Kuna $am = n = am'$ ja $cm = q = cm'$, siis $m = m'$ ruudu (I) konservatiivsuse tõttu.

■

Definitsioon 5.40. Paari (f, f) tagasiõmbajat nimetatakse morfismi f tuumapaariks.

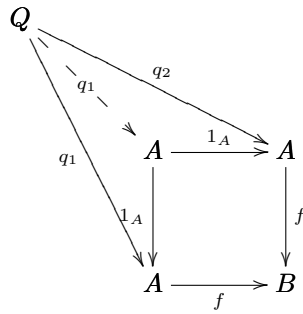
Näide 5.41. Näitest 5.35 järeldub, et kategooria **Set** morfismi $f : A \rightarrow C$ tuumapaar on kujutuse f tuum $\{(a, a') \in A \times A \mid f(a) = f(a')\}$ koos vastavate projektisioonidega. Sama kehtib näiteks ka kõigi monoidide kategoorias **Mon**.

Osutub, et tuumapaaride abil saab kirjeldada monomorfisme.

Lause 5.42. Iga morfismi $f : A \rightarrow B$ korral on järgmised väited samaväärsed.

1. f on monomorfism.
2. $(A, 1_A, 1_A)$ on f tuumapaar.
3. Morfismil f leidub selline tuumapaar (P, p_1, p_2) , kus $p_1 = p_2$.

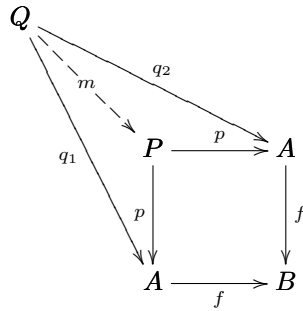
Tõestus. 1. $\Rightarrow$ 2. Olgu f monomorfism. Ilmselt $f1_A = f1_A$. Kui $f q_1 = f q_2$ mingite morfismide $q_1, q_2 : Q \rightarrow A$ korral, siis $q_1 = q_2$ ja seega kolmnurgad diagrammis



on kommutatiivsed.

2. $\Rightarrow$ 3. on ilmne.

3. $\Rightarrow$ 1. Olgu (P, p, p) morfismi f tuumapaar ja $f q_1 = f q_2$, kus $q_1, q_2 : Q \rightarrow A$. Siis leidub üheselt määratud $m : Q \rightarrow P$ nii, et $q_1 = pm = q_2$. Seega f on monomorfism.

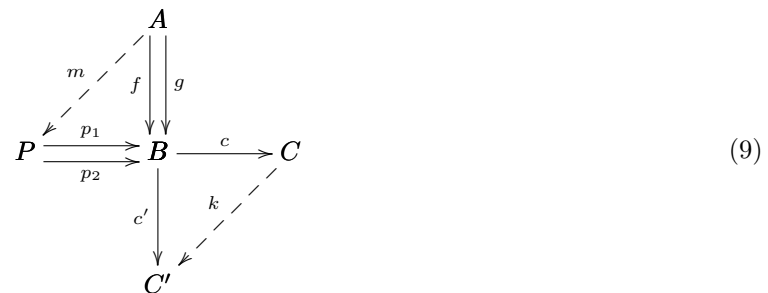


■

Järgmised laused annavad mõned huvitavad seosed tuumapaaride ja kovõrdsustajate vahel.

Lause 5.43. Kui kovõrdsustajal on olemas tuumapaar, siis on see kovõrdsustaja tolle tuumapaari kovõrdsustaja.

Tõestus. Vaatleme diagrammi



kus $(C, c) \approx \text{Coeq}(f, g)$ ja $(P, p_1, p_2) \approx \text{Pb}(c, c)$. Näitame, et $(C, c) \approx \text{Coeq}(p_1, p_2)$. Kuna $cf = cg$ ja (P, p_1, p_2) on paari (c, c) tagasitõmbaja, siis leidub üheselt määratud morfism $m : A \rightarrow P$ nii, et $p_1 m = f$ ja $p_2 m = g$. Kui nüüd $c' : B \rightarrow C'$ on selline, et $c' p_1 = c' p_2$, siis $c' f = c' p_1 m = c' p_2 m = c' g$ ning kovõrdsustaja (C, c) universaalomaduse põhjal leidub üheselt määratud $k : C \rightarrow C'$, mille korral $kc = c'$. Sellega on näidatud, et (C, c) on morfismide p_1, p_2 kovõrdsustaja. ■

Lause 5.44. Kui tuumapaaril on olemas kovõrdsustaja, siis on see tuumapaar tolle kovõrdsustaja tuumapaar.

Tõestus. Vaatleme jälle diagrammi (9), kus nüüd eeldame, et $(P, p_1, p_2) \approx \text{Pb}(c', c')$ ja $(C, c) \approx \text{Coeq}(p_1, p_2)$. Peame näitama, et $(P, p_1, p_2) \approx \text{Pb}(c, c)$. Et $c' p_1 = c' p_2$, siis leidub üheselt määratud $k : C \rightarrow C'$ nii, et $kc = c'$. Oletame, et $f, g : A \rightarrow B$ on sellised, et $cf = cg$. Siis $c' f = kc f = kcg = c' g$, millest järeldub, et $p_1 m = f$ ja $p_2 m = g$ üheselt määratud morfismi $m : A \rightarrow P$ korral. ■

5.4. Piirid ja kopiirid

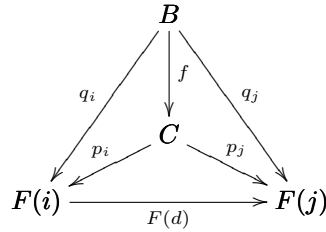
Tuleb välja, et kõik selles päätükis siiani vaadeldud konstruktsioonid on üldisema konstruktsiooni erijuhud. Edasises tähistagu $\mathcal{D}$ väikest kategooriat ja $I = \mathcal{D}_0$ selle kategooria objektide hulka.

Definitsioon 5.45. Olgu $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funktor. **Koonus** funktoril F (lühidalt F -koonus) on paar $(C, (p_i)_{i \in I})$, mis rahuldab tingimusi:

1. $C \in \mathcal{C}_0$;
2. iga objekti $i \in I$ korral $p_i : C \rightarrow F(i)$;
3. kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i \rightarrow j$ korral kehtib võrdus $p_j = F(d)p_i$.

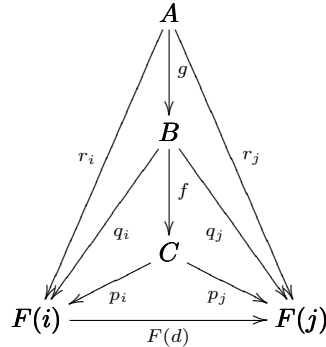
Teiste sõnadega: paar $(C, (p_i)_{i \in I})$ on koonus funktoril F parajasti siis, kui $p = (p_i)_{i \in I} : \Delta_C \Rightarrow F$, kus $\Delta_C : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ on konstantne funktor objektile C (vt. näidet 3.3(3)). See tähendab, et koonused funktoril F on loomulikud teisendused konstantsest funktorist funktorisse F .

Definitsioon 5.46. Olgu $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funktor ja $(B, (q_i)_{i \in I})$, $(C, (p_i)_{i \in I})$ kaks koonust funktoril F . Kategooria $\mathcal{C}$ morfismi $f : B \rightarrow C$ nimetatakse **morfismiks koonusest** $(B, (q_i)_{i \in I})$ **koonusesse** $(C, (p_i)_{i \in I})$, kui $p_i f = q_i$ iga $i \in I$ korral.



Lause 5.47. Fikseeritud funktori $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ korral moodustavad koonused funktoril F ja nende morfismid kategooria.

Tõestus. Selle uue kategooria morfisme komponeeritakse nii nagu kategoorias $\mathcal{C}$.



Oletame, et $f : (B, (q_i)_{i \in I}) \rightarrow (C, (p_i)_{i \in I})$ ja $g : (A, (r_i)_{i \in I}) \rightarrow (B, (q_i)_{i \in I})$ on kaks funktoril F antud koonuste morfismi. Siis iga $i \in I$ korral

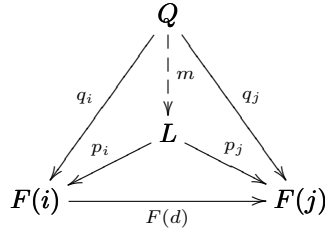
$$p_i(fg) = (p_i f)g = q_i g = r_i$$

ja seega tõepoolest $fg : (A, (r_i)_{i \in I}) \rightarrow (C, (p_i)_{i \in I})$ on koonuste morfism. Koonuse $(C, (p_i)_{i \in I})$ ühikmorfism on loomulikult 1_C . Komponeerimise assotsiatiivsus järeldeb $\mathcal{C}$ vastavast omadusest. ■

Lauses 5.47 konstrueeritud kategooriat tähistatakse $\text{cone}(F)$ ja nimetatakse F -koonuste kategooriaks.

Definitsioon 5.48. Funktori $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ **piir** on F -koonuste kategooria $\text{cone}(F)$ lõppobjekt. Seega koonus $(L, (p_i)_{i \in I})$ funktoril F on F piir, kui iga F -koonuse $(Q, (q_i)_{i \in I})$ korral leidub üheselt määratud morfism $m : Q \rightarrow L$ nii, et iga objekti $i \in I$ korral $q_i = p_i m$. Lühidalt kirjutame $(L, (p_i)_{i \in I}) \approx \lim F$.

Vahel öeldakse, et $(L, (p_i)_{i \in I})$ on piir objektidest $F(i)$ ja morfismidest $F(d)$ koosneval diagrammil kategoorias $\mathcal{C}$.



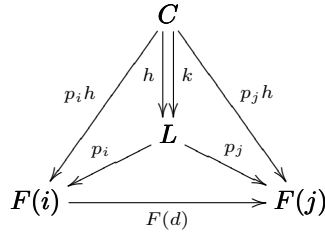
Lausest 2.31 saame vahetult järgmise tulemuse.

Lause 5.49. Kui $(L, (p_i)_{i \in I})$ ja $(M, (q_i)_{i \in I})$ on funktori $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ piirid, siis leidub selline isomorfism $f : M \rightarrow L$ kategoorias $\mathcal{C}$, et $p_i f = q_i$ iga $i \in I$ korral.

Lause 5.5 saab üldistada suvaliste piiride juhule.

Lause 5.50. Kui $(L, (p_i)_{i \in I})$ on funktori $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ piir ja $h, k : C \rightarrow L$ on sellised morfismid, et iga $i \in I$ korral $p_i h = p_i k$, siis $h = k$.

Tõestus. Kuna $F(d)p_i h = p_j h$ iga morfismi $d : i \rightarrow j$ korral, siis $(C, (p_i h)_{i \in I})$ on koonus funktoril F . Seega leidub ühene morfism $m : C \rightarrow L$, mis rahuldab võrdust $p_i m = p_i h$ iga $i \in I$ korral. See aga tähendab, et $h = k$.



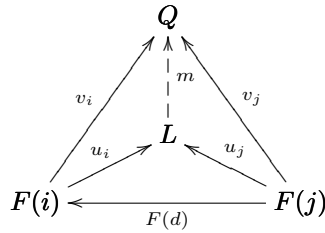
■

Definitsioon 5.51. Olgu $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funktor. **Kokoonus** funktoril F (lühidalt F -kokoonus) on paar $(C, (u_i)_{i \in I})$, mis rahuldab tingimusi:

1. $C \in \mathcal{C}_0$;
2. iga objekti $i \in I$ korral $u_i : F(i) \rightarrow C$;
3. kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : j \rightarrow i$ korral $u_j = u_i F(d)$.

Duaalselt koonuste juhuga defineeritakse F -kokoonuste kategooria $\text{cocone}(F)$.

Definitsioon 5.52. Funktori $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ **kopiir** on F -kokoonuste kategooria $\text{cocone}(F)$ algobjekt. Seega kokoonus $(L, (u_i)_{i \in I})$ funktoril F on F kopiir, kui iga F -kokoonuse $(Q, (v_i)_{i \in I})$ jaoks leidub üheselt määratud morfism $m : L \rightarrow Q$ nii, et iga objekti $i \in I$ korral $v_i = m u_i$. Lühidalt kirjutame $(L, (u_i)_{i \in I}) \approx \text{colim} F$.



Näited 5.53. 1. Vaatleme kahe objektiga diskreetset kategooriat $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_0 = \{1, 2\}$ (vt. näidet 1.5(3)). Funktor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ on ära määratud $\mathcal{C}$ objektide paari $(F(1), F(2))$ poolt. Koonus funktoril F on diagramm

$$F(1) \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} F(2)$$

ja kokoonus funktoril F on diagramm

$$F(1) \xrightarrow{u_1} P \xleftarrow{u_2} F(2).$$

Seega kolmik (P, p_1, p_2) on funktori F piir parajasti siis, kui ta on objektide $F(1)$ ja $F(2)$ korrutis ja kolmik (P, u_1, u_2) on funktori F kopiir parajasti siis, kui ta on $F(1)$ ja $F(2)$ kokorrutis.

2. Olgu $\mathcal{D} = \mathbf{0}$ tühi kategooria. Siis koonus või kokoonus funktoril $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ on lihtsalt $\mathcal{C}$ objekt. Seega $C \in \mathcal{C}_0$ on F piir (kopiir) parajasti siis, kui ta on $\mathcal{C}$ lõppobjekt (algobjekt).
3. Kui I on hulk ja $\mathcal{D}$ on diskreetne kategooria objektide hulga $\mathcal{D}_0 = I$, siis funktor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ on määratud $\mathcal{C}$ objektide süsteemi $(F(i))_{i \in I}$ poolt. Koonus funktoril F on paar $(C, (p_i)_{i \in I})$, kus $p_i : C \rightarrow F(i)$. See koonus on F piir parajasti siis, kui ta on süsteemi $(F(i))_{i \in I}$ korrutis. Duaalselt, F kopiir on $(F(i))_{i \in I}$ kokorrutis.
4. Vaatleme kategooriat $\mathcal{D}$, kus $\mathcal{D}_0 = \{1, 0\}$ ja kus on kaks ühikmorfismist erinevat morfismi $d_1, d_2 : 1 \rightarrow 0$. Funktor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ on ära määratud $\mathcal{C}$ paralleelsete morfismide paariga $f_1, f_2 : F(1) \rightarrow F(0)$. Koonus funktoril F on kommutatiivne diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & e_0 & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ E & \xrightarrow{e_1} & F(1) & \xrightarrow{f_1} & F(0) \\ & & & \xrightarrow{f_2} & \\ & & & & \end{array}$$

ja kokoonus funktoril F on kommutatiivne diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & c_1 & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ F(1) & \xrightarrow{f_1} & F(0) & \xrightarrow{c_0} & C \\ & & \xrightarrow{f_2} & & \end{array}$$

Ei ole raske näha, et $(E, f_1 e_1, e_1)$ on F piir parajasti siis, kui (E, e_1) on f_1 ja f_2 võrdsustaja ja $(C, c_0, c_0 f_1)$ on F kopiir parajasti siis, kui (C, c_0) on f_1 ja f_2 kovõrdsustaja.

5. Vaatleme kategooriat $\mathcal{D}$, kus $\mathcal{D}_0 = \{0, 1, 2\}$ ja kus on kaks ühikmorfismist erinevat morfismi $d_1 : 1 \rightarrow 0$ ja $d_2 : 2 \rightarrow 0$. Funktor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ on ära määratud $\mathcal{C}$ morfismide paariga $f_1 : F(1) \rightarrow F(0)$, $f_2 : F(2) \rightarrow F(0)$. Koonus funktoril F on kommutatiivne diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_2} & F(2) \\ p_1 \downarrow & \searrow p_0 & \downarrow f_2 \\ F(1) & \xrightarrow{f_1} & F(0) \end{array}$$

Seega $(P, f_1 p_1, p_1, p_2)$ on F piir parajasti siis, kui (P, p_1, p_2) on morfismide f_1 ja f_2 tagasitõmbaja.

6. Olgu J hulk ja $\mathcal{D}$ kategooria, kus $\mathcal{D}_0 = J \sqcup \{0\}$ ning ühikmorfismist erinevad morfismid on $d_j : j \rightarrow 0, j \in J$. Funktor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ on ära määratud $\mathcal{C}$ morfismide süsteemiga $(f_j : F(j) \rightarrow F(0))_{j \in J}$. Koonus funktoril F on kommutatiivsete diagrammide pere

$$\begin{array}{ccc} P & & \\ p_j \downarrow & \searrow p_0 & \\ F(j) & \xrightarrow{f_j} & F(0) \end{array},$$

$j \in J$. Seega $(P, (p_i)_{i \in J \sqcup \{0\}})$ on F piir parajasti siis, kui $(P, (p_j)_{j \in J})$ on morfismide $f_j, j \in J$, hulgitagastõmbaja.

Järgnev tabel võtab eelneva näite kokku.

$\mathcal{D}$ objektide hulk	ühikmorfismist erinevad $\mathcal{D}$ morfismid	$\mathcal{C}$ -s on olemas $\mathcal{D}$ -piirid tähendab, et $\mathcal{C}$ -s on ...	$\mathcal{C}$ -s on olemas $\mathcal{D}^{\text{op}}$ -kopiirid tähendab, et $\mathcal{C}$ -s on ...
ei ole $\{1, 2\}$ $\{0, 1\}$ $\{0, 1, 2\}$	ei ole ei ole $d_1, d_2 : 1 \rightrightarrows 0$ $d_1 : 1 \rightarrow 0, d_2 : 2 \rightarrow 0$	lõppobjekt binaarsed korrutised võrdsustajad tagasitõmbajad	algobjekt binaarsed kokorrutised kovõrdsustajad väljatõukajad
$\mathcal{D}$ objektide hulk	ühikmorfismist erinevad $\mathcal{D}$ morfismid	$\mathcal{C}$ -s on olemas $\mathcal{D}$ -piirid kõigi selliste $\mathcal{D}$ -de korral tähendab, et $\mathcal{C}$ -s on ...	$\mathcal{C}$ -s on olemas $\mathcal{D}^{\text{op}}$ -kopiirid kõigi selliste $\mathcal{D}$ -de korral tähendab, et $\mathcal{C}$ -s on ...
I hulk $\{1, 2\}$ $J \sqcup \{0\}, J$ hulk	ei ole $d_i : 1 \rightarrow 2, i \in I$ $d_j : j \rightarrow 0, j \in J$	korrutised hulgivõrdsustajad hulgitagasiõmbajad	kokorrutised hulgikovõrdsustajad hulgiväljatõukajad

Osutub, et kõik piirid (ja ka kõik kopiirid) eksisteerivad kategoorias Set ja neid saab konstrueerida kanoonilisel viisil.

Teoreem 5.54. Olgu $F : \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$ funktor ja

$$L = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in F(i), (\forall d \in \mathcal{D}(i, j))(F(d)(x_i) = x_j)\} \subseteq \prod_{i \in I} F(i).$$

Siis $(L, (p_i)_{i \in I})$, kus $p_i : L \rightarrow F(i)$, $i \in I$, on otsekorrutise $\prod_{i \in I} F(i)$ projektsioonide ahendid, on F piir.

Tõestus. Ilmselt $(L, (p_i)_{i \in I})$ on koonus funktoril F . Kui $(Q, (q_i)_{i \in I})$ on ka koonus funktoril F , siis nõutav üheselt määratud kujutus $m : Q \rightarrow L$ on iga $x \in Q$ korral defineeritud võrdusega

$$m(x) := (q_i(x))_{i \in I}.$$

■

Piirid saab paljudes teistes konkreetsetes kategooriates konstrueerida samamoodi. Näiteks kui $F : \mathcal{D} \rightarrow \text{Gr}$, siis L on rühmade $F(i)$ otsekorrutise $\prod_{i \in I} F(i)$ alamhulk, mis on rühm komponenthaaval defineeritud tehete suhtes. Kuna iga $F(d)$ on rühmade homomorfism, siis

$$\begin{aligned} F(d)(x_i y_i) &= F(d)(x_i) \cdot F(d)(y_i) = x_j y_j, \\ F(d)(x_i^{-1}) &= (F(d)(x_i))^{-1} = x_j^{-1}, \end{aligned}$$

ja seega L on $\prod_{i \in I} F(i)$ alamrühm. On selge, et kujutused p_i on rühmade homomorfismid ja ka m on rühmade homomorfism kui kõik kujutused q_i on rühmade homomorfismid.

5.5. Täielikud kategooriad

Definitsioon 5.55. Kategooria $\mathcal{C}$ on

- **$\mathcal{D}$ -täielik**, kus $\mathcal{D}$ on kategooria, kui igal funktoril $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ on olemas piir;
- **lõplikult täielik**, kui $\mathcal{C}$ on $\mathcal{D}$ -täielik iga lõpliku kategooria $\mathcal{D}$ korral;
- **täielik**, kui $\mathcal{C}$ on $\mathcal{D}$ -täielik iga väikse kategooria $\mathcal{D}$ korral.

Duaalselt defineeritakse $\mathcal{D}$ -kotäielikud, lõplikult kotäielikud ja kotäielikud kategooriad.

Teoreem 5.56. Iga kategooria $\mathcal{C}$ korral on järgmised väited samaväärsed.

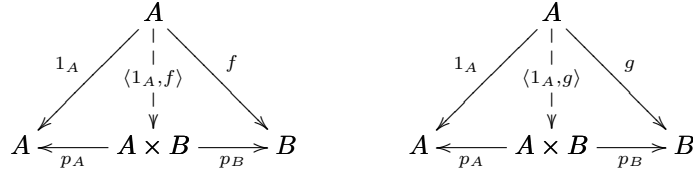
1. $\mathcal{C}$ on täielik.
2. Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas hulgitagasiõmbajad ja lõppobjekt.
3. Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas korrutised ja tagasiõmbajad.

4. Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas korrutised ja võrdsustajad.

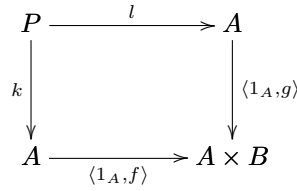
Tõestus. $1 \Rightarrow 2$ on ilmne.

$2 \Rightarrow 3$. See tuleb välja järeldusest 5.38.

$3 \Rightarrow 4$. Peame tõestama, et iga morfismipaari $f, g : A \rightarrow B$ jaoks leidub võrdsustaja. Korrutiste universaalomaduse abil saame leida üheselt määratud morfismid $\langle 1_A, f \rangle$, $\langle 1_A, g \rangle$, et diagrammid



kommuteeruvad. Konstrueerime morfismide $\langle 1_A, f \rangle$ ja $\langle 1_A, g \rangle$ tagasitõmbaja

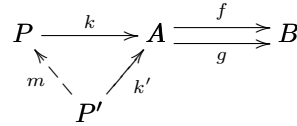


ja näitame, et (P, k) on morfismide f, g võrdsustaja. Paneme tähele, et selles ruudus $k = l$, sest

$$k = 1_A k = p_A \langle 1_A, f \rangle k = p_A \langle 1_A, g \rangle l = 1_A l = l.$$

Samuti näeme, et

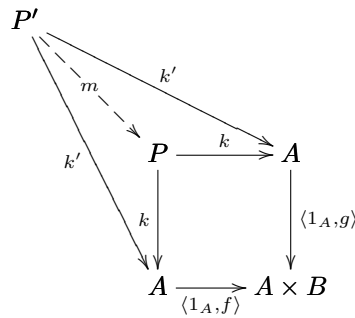
$$fk = p_B \langle 1_A, f \rangle k = p_B \langle 1_A, g \rangle l = gl = gk.$$



Kui leidub morfism $k' : P' \rightarrow A$, mille korral $fk' = gk'$, siis ka

$$\begin{aligned} p_A \langle 1_A, f \rangle k' &= k' = p_A \langle 1_A, g \rangle k', \\ p_B \langle 1_A, f \rangle k' &= p_B \langle 1_A, g \rangle k', \end{aligned}$$

millest lause 5.5 põhjal järeldub võrdus $\langle 1_A, f \rangle k' = \langle 1_A, g \rangle k'$. Kuna (P, k, k) on tagasitõmbaja, siis leidub üheselt määratud morfism $m : P' \rightarrow P$ nii, et $km = k'$.



$4 \Rightarrow 1$. Vaatleme väikest kategooriat $\mathcal{D}$ ja funktoori $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Kõigepäält konstrueerime korrutised

$$\left(\prod_{i \in I} F(i), (s_i)_{i \in I} \right) \quad \text{ja} \quad \left(\prod_{d \in \mathcal{D}} F(\text{cod}(d)), (r_d)_{d \in \mathcal{D}} \right). \quad (10)$$

Teise korrutise universaalomaduse põhjal leidub üheselt määratud morfism α nii, et

$$r_d \alpha = s_{\text{cod}(d)} = s_j$$

iga morfismi $d : i \rightarrow j \in \mathcal{D}$ korral, ja üheselt määratud morfism β nii, et

$$r_d \beta = F(d) s_{\text{dom}(d)} = F(d) s_i$$

iga morfismi $d : i \rightarrow j \in \mathcal{D}$ korral. Olgu (L, l) paari (α, β) võrdsustaja, siis muuhulgas $\alpha l = \beta l$. Defineerime iga $i \in I$ korral morfismi

$$p_i := s_i l : L \rightarrow F(i)$$

ja tõestame, et $(L, (p_i)_{i \in I})$ on funktori F piir.

$$\begin{array}{ccccc}
 Q & \xrightarrow{q_i} & F(i) & & F(\text{cod}(d)) \\
 \downarrow m & \searrow q & \uparrow s_i & \nearrow s_{\text{cod}(d)} & \uparrow r_d \\
 L & \xrightarrow{l} & \prod_{i \in I} F(i) & \xrightarrow[\beta]{\alpha} & \prod_{d \in \mathcal{D}} F(\text{cod}(d)) \\
 \downarrow p_i & \nearrow s_i & \downarrow s_{\text{dom}(d)} & & \downarrow r_d \\
 F(i) & & F(\text{dom}(d)) & \xrightarrow{F(d)} & F(\text{cod}(d))
 \end{array} \tag{11}$$

Iga morfismi $d : i \rightarrow j$ korral kategoorias $\mathcal{D}$ kehtib

$$F(d) p_i = F(d) s_i l = r_d \beta l = r_d \alpha l = s_j l = p_j,$$

mis tähendab, et $(L, (p_i)_{i \in I})$ on koonus funktori F . Oletame, et $(Q, (q_i)_{i \in I})$ on samuti koonus funktori F . Korrutise $\prod_{i \in I} F(i)$ universaalomaduse põhjal leidub üheselt määratud morfism $q : Q \rightarrow \prod_{i \in I} F(i)$ nii, et $s_i q = q_i$ iga $i \in I$ korral. Nüüd $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i \rightarrow j$ korral

$$r_d \alpha q = s_j q = q_j = F(d) q_i = F(d) s_i q = r_d \beta q.$$

Lause 5.5 põhjal saame $\alpha q = \beta q$. Võrdsustaja (L, l) universaalomadust kasutades saame üheselt määratud morfismi $m : Q \rightarrow L$, mille korral $lm = q$. Järelikult

$$p_i m = s_i l m = s_i q = q_i$$

iga $i \in I$ korral. Jääb tõestada, et morfism m on üheselt määratud. Oletame, et $m' : Q \rightarrow L$ on samuti morfism, mis rahuldab võrdusi $p_i m' = q_i$, $i \in I$. Siis

$$s_i l m = s_i q = q_i = p_i m' = s_i l m'$$

iga $i \in I$ korral, millest jälle lause 5.5 põhjal järeldub $lm = lm'$. Sellest saame lause 5.26 tõttu võrduse $m = m'$, sest l on võrdsustaja ja seega monomorfism. ■

Samamoodi saab tõestada järgmise tulemuse.

Teoreem 5.57. Iga kategooria $\mathcal{C}$ korral on järgmised väited samaväärsed.

1. $\mathcal{C}$ on lõplikult täielik.
2. Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas tagasitõmbajad ja lõppobjekt.
3. Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas lõplikud korrutised ja tagasitõmbajad.
4. Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas lõplikud korrutised ja võrdsustajad.

Sõnastame ka teoreemiga 5.56 duaalse tulemuse.

Teoreem 5.58. Iga kategooria $\mathcal{C}$ korral on järgmised väited samaväärsed.

1. $\mathcal{C}$ on kotäielik.
2. Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas hulgiväljatõukajad ja algobjekt.
3. Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas kokorutised ja väljatõukajad.
4. Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas kokorutised ja kovõrdsustajad.

Näited 5.59. 1. Lõplike hulkade kategooria ja lõplike topoloogiliste ruumide kategooria on mõlemad lõplikult täielikud ja lõplikult kotäielikud, aga kumbki neist ei ole täielik ega kotäielik.

2. Lõplike rühmade kategooria on lõplikult täielik, aga mitte lõplikult kotäielik.
3. Kategooriad $\mathbf{Set}$, $\mathbf{Gr}$, $\mathbf{Ab}$ ja $\mathbf{Top}$ on täielikud ja kotäielikud.
4. Järjestatud hulk, mida vaadeldakse kategooriana, on kategooriselt täielik parajasti siis, kui ta on täielik võre, s.t. mistahes alamhulgal leidub alumine raja.

5.6. Piire säilitavad funktorid

Definitsioon 5.60. Olgu $\mathcal{D}$ väike kategooria ning tähistame jälle $I = \mathcal{D}_0$. Öeldakse, et funktor $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ säilitab $\mathcal{D}$ -piire, kui iga funktori $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ korral sellest, et $(L, (p_i)_{i \in I})$ on F piir, järeldub, et $(G(L), (G(p_i))_{i \in I})$ on $GF : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ piir.

Definitsioon 5.61. Funktor $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ säilitab piire (säilitab lõplikke piire), kui G säilitab $\mathcal{D}$ -piire iga väikse kategooria (lõpliku kategooria) $\mathcal{D}$ korral.

Märkus 5.62. On selge, et kui $(L, (p_i)_{i \in I}) \in \text{cone}(F)$, siis $(G(L), (G(p_i))_{i \in I}) \in \text{cone}(GF)$. Seega piiride säilitamise kontrollimine taandub universaalomaduse kontrollimisele viimase koonuse jaoks.

Näited 5.63. 1. Unustavad funktorid kategooriatest $\mathbf{Gr}$, $\mathbf{Ab}$, $\mathbf{Mod}_R$, $\mathbf{Rng}$ kategooriasse $\mathbf{Set}$ säilitavad piire, aga ükski neist ei säilita kõiki kopiire.

2. Unustav funktor kategooriast $\mathbf{Top}$ kategooriasse $\mathbf{Set}$ säilitab piire ja kopiire.
3. Kui kategoorias $\mathcal{A}$ on olemas lõplikud korrutised ja $A \in \mathcal{A}_0$ on fikseeritud objekt, siis funktor $(A \times -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ säilitab piire.

Lemma 5.64. Kui funktor säilitab tagasitõmbajaid, siis ta säilitab ka monomorfisme.

Tõestus. Olgu $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ funktor ja $f : A \rightarrow B$ monomorfism kategoorias $\mathcal{A}$. Lause 5.42 põhjal on

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A} & A \\ 1_A \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

konservatiivne ruut. Eelduse põhjal on ka

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{1_{F(A)}} & F(A) \\ 1_{F(A)} \downarrow & & \downarrow F(f) \\ F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \end{array}$$

konservatiivne ruut. Jällegi lause 5.42 põhjal on $F(f)$ monomorfism. ■

Teoreem 5.65. Kui $\mathcal{A}$ on täielik kategooria ja $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on funktor, siis järgmised väited on samaväärsed.

1. G säilitab piire.
2. G säilitab hulgitagasiõmbajaid ja lõppobjekte.
3. G säilitab korrutisi ja tagasiõmbajaid.
4. G säilitab korrutisi ja võrdsustajaid.

Tõestus. $1 \Rightarrow 2$ on ilmne.

$2 \Rightarrow 3$. Säilitagu G hulgitagasiõmbajaid ja lõppobjekte. Olgu $\mathcal{D}$ väike diskreetne kategooria, $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ funktor ja $(P, (p_i)_{i \in I})$ funktori F piir, s.t. objektide $F(i)$, $i \in I$, korrutis. Et $\mathcal{A}$ on täielik, siis on temas olemas lõppobjekt $\mathbf{1}$ ja üheselt määratud morfismid $f_i : F(i) \rightarrow \mathbf{1}$, $i \in I$. Lause 5.37 põhjal on $(P, (p_i)_{i \in I})$ morfismide f_i , $i \in I$, hulgitagasiõmbaja. Eelduse tõttu on $G(\mathbf{1})$ kategooria $\mathcal{B}$ lõppobjekt ja $(G(P), (G(p_i))_{i \in I})$ on morfismide $G(f_i) : (GF)(i) \rightarrow G(\mathbf{1})$, $i \in I$, hulgitagasiõmbaja kategoorias $\mathcal{B}$. Järelikult $(G(P), (G(p_i))_{i \in I})$ on objektide $G(F(i))$, $i \in I$, korrutis.

$3 \Rightarrow 4$. Säilitagu G korrutisi ja tagasiõmbajaid. Olgu (E, e) morfismide $f, g : A \rightarrow B$ võrdsustaja kategoorias $\mathcal{A}$, mis on konstrueeritud nii nagu teoreemi 5.56 tõestuses, s.t. olgu

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e} & A \\ \downarrow e & & \downarrow \langle 1_A, g \rangle \\ A & \xrightarrow{\langle 1_A, f \rangle} & A \times B \end{array}$$

konservatiivne ruut. Siis ka

$$\begin{array}{ccc} G(E) & \xrightarrow{G(e)} & G(A) \\ \downarrow G(e) & & \downarrow G(\langle 1_A, g \rangle) \\ G(A) & \xrightarrow{G(\langle 1_A, f \rangle)} & G(A \times B) \end{array} \quad (12)$$

on konservatiivne ruut. Peame näitama, et $(G(E), G(e)) \approx \text{Eq}(G(f), G(g))$.

$$\begin{array}{ccccc} G(E) & \xrightarrow{G(e)} & G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \\ & \nearrow m & \nearrow e' & \xrightarrow{G(g)} & \\ & & E' & & \end{array}$$

Märkuse 5.62 tõttu piisab universaalomaduse kontrollimisest. Oletame, et $G(f)e' = G(g)e'$ mingi morfismi $e' : E' \rightarrow G(A)$ korral. Siis

$$\begin{aligned} G(p_A)G(\langle 1_A, f \rangle)e' &= e' = G(p_A)G(\langle 1_A, g \rangle)e', \\ G(p_B)G(\langle 1_A, f \rangle)e' &= G(p_B)G(\langle 1_A, g \rangle)e'. \end{aligned}$$

Kuna G säilitab korrutisi, siis $(G(A \times B), G(p_A), G(p_B))$ on objektide $G(A)$ ja $G(B)$ korrutis kategoorias $\mathcal{B}$ ning lause 5.50 põhjal $G(\langle 1_A, f \rangle)e' = G(\langle 1_A, g \rangle)e'$. Tänu ruudu (12) konservatiivsusele leidub üheselt määratud morfism $m : E' \rightarrow G(E)$ nii, et $G(e)m = e'$.

$4 \Rightarrow 1$. Säilitagu G korrutisi ja võrdsustajaid. Vaatleme väikest kategooriat $\mathcal{D}$ ja funktoori $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$. Näitame, et G säilitab funktoori F piiri $(L, (p_i)_{i \in I})$, mis on konstrueeritud nii nagu teoreemi 5.56 tõestuses, s.t. (L, l) on morfismide $\alpha, \beta : \prod_{i \in I} F(i) \rightarrow \prod_{d \in \mathcal{D}} F(\text{cod}(d))$ võrdsustaja, kus paarid (10) on korrutised, α ja β on sellised üheselt määratud morfismid kategoorias $\mathcal{A}$, et $r_d \alpha = s_j$ ja $r_d \beta = F(d)s_i$ iga $\mathcal{D}$ morfismi $d : i \rightarrow j$ korral ning $p_i = s_i l$ iga $i \in I$ korral (vt. diagrammi 11). Me peame näitama, et $(G(L), (G(p_i))_{i \in I})$ on funktoori $GF : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ piir. Selleks oletame, et $(Q, (q_i)_{i \in I}) \in \text{cone}(GF)$, s.t. $(GF)(d)q_i = q_j$ iga $\mathcal{D}$

morfismi $d : i \rightarrow j$ korral.

$$\begin{array}{ccc}
 & Q & \\
 q_i \swarrow & \downarrow m & \searrow q_j \\
 G(p_i) & G(L) & G(p_j) \\
 \swarrow & & \searrow \\
 (GF)(i) & \xrightarrow{(GF)(d)} & (GF)(j)
 \end{array}$$

Eelduse põhjal on $(G(\prod_{i \in I} F(i)), (G(s_i))_{i \in I})$ objektide $(GF)(i)$, $i \in I$, korrutis. Seega leidub selline üheselt määratud morfism $q : Q \rightarrow G(\prod_{i \in I} F(i))$, et $G(s_i)q = q_i$ iga $i \in I$ korral. Järelikult

$$\begin{aligned}
 G(r_d)G(\alpha)q &= G(r_d\alpha)q = G(s_j)q = q_j = (GF)(d)q_i = G(F(d))G(s_i)q \\
 &= G(F(d)s_i)q = G(r_d\beta)q = G(r_d)G(\beta)q
 \end{aligned}$$

iga $\mathcal{D}$ morfismi $d : i \rightarrow j$ korral.

$$\begin{array}{ccccc}
 G(L) & \xrightarrow{G(l)} & G(\prod_{i \in I} F(i)) & \xrightleftharpoons[G(\beta)]{G(\alpha)} & G(\prod_{d \in \mathcal{D}} F(\text{cod}(d))) \\
 \uparrow m & & \uparrow q & & \downarrow G(r_d) \\
 & & G(s_i) & & \\
 Q & \xrightarrow{q_i} & (GF)(i) & \xrightarrow{(GF)(d)} & (GF)(\text{cod}(d))
 \end{array}$$

Eelduse põhjal on $(G(\prod_{d \in \mathcal{D}} F(\text{cod}(d))), G(r_d))$ objektide $(GF)(\text{cod}(d))$ korrutis ning järelikult $G(\alpha)q = G(\beta)q$. Jällegi eelduse põhjal on $(G(L), G(l))$ morfismide $G(\alpha), G(\beta)$ võrdsustaja ning seega leidub üheselt määratud $m : Q \rightarrow G(L)$ nii, et $G(l)m = q$. Järelikult

$$G(p_i)m = G(s_i)G(l)m = G(s_i)q = q_i$$

iga $i \in I$ korral. Oletame, et ka $m' : Q \rightarrow G(L)$ on selline, et $G(p_i)m' = q_i$ iga $i \in I$ korral. Siis $G(s_i)G(l)m = G(s_i)G(l)m'$ iga $i \in I$ korral. Taandades korruga korrutise projektsioonid $G(s_i)$ saame $G(l)m = G(l)m'$. Tänu lausele 5.26 on l monomorfism ja lemma 5.64 põhjal on ka $G(l)$ monomorfism. Seega $m = m'$. ■

Analoogiliselt saab tõestada järgmise teoreemi.

Teoreem 5.66. Kui $\mathcal{A}$ on lõplikult täielik kategooria ja $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on funktor, siis järgmised väited on samaväärsed.

1. G säilitab lõplikke piire.
2. G säilitab tagasitõmbajaid ja lõppobjekte.
3. G säilitab lõplikke korrutisi ja tagasitõmbajaid.
4. G säilitab lõplikke korrutisi ja võrdsustajaid.

Osutub, et mor-funktorid säilitavad piire.

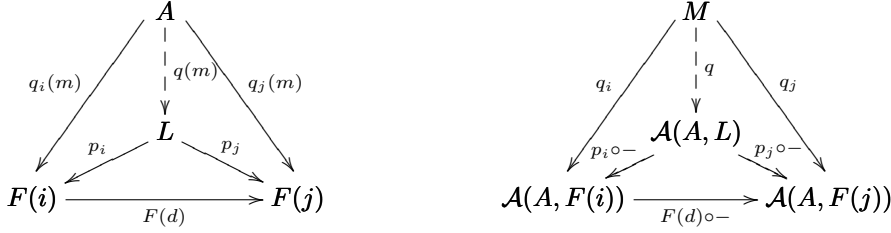
Lause 5.67. Vaatleme kategooriat $\mathcal{A}$ ja objekti $A \in \mathcal{A}_0$. Kovariantne mor-funktor $\mathcal{A}(A, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$ säilitab kõiki olemasolevaid piire, kaasaarvatud suured piirid.

Tõestus. Vaatleme suvalist kategooriat $\mathcal{D}$, funktoori $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ ja tema piiri $(L, (p_i)_{i \in I})$, kus $I = \mathcal{D}_0$. Siis kindlasti $(\mathcal{A}(A, L), (p_i \circ -)_{i \in I})$ on koonus liitfunktoril $\mathcal{A}(A, F(-)) = \mathcal{A}(A, -) \circ F : \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$

kategoorias $\mathbf{Set}$. Olgu $(M, (q_i : M \rightarrow \mathcal{A}(A, F(i)))_{i \in I})$ samuti koonus funktoiril $\mathcal{A}(A, F(-))$. See tähendab, et kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i \rightarrow j$ korral

$$q_j = \mathcal{A}(A, F(d)) \circ q_i = (F(d) \circ -) \circ q_i,$$

seega iga elemendi $m \in M$ korral $q_j(m) = F(d) \circ q_i(m)$. Viimane tähendab, et $(A, (q_i(m))_{i \in I})$ on koonus funktoiril F . Järelikult leidub üheselt määratud morfism $q(m) : A \rightarrow L$ nii, et $p_i \circ q(m) = q_i(m)$ iga $i \in I$ korral.



See defineerib kujutuse $q : M \rightarrow \mathcal{A}(A, L)$ kategoorias $\mathbf{Set}$, mis rahuldab tingimust $(p_i \circ -) \circ q = q_i$ iga $i \in I$ korral.

Jääb veel tõestada, et q on ühene. Oletame, et ka $r : M \rightarrow \mathcal{A}(A, L)$ on selline, et $(p_i \circ -) \circ r = q_i$ iga $i \in I$ korral. Siis $p_i \circ r(m) = q_i(m)$ iga $i \in I$ ja $m \in M$ korral. Kuna L on piir, siis $q(m) = r(m)$ iga $m \in M$ korral. See tähendab, et kujutused q ja r on võrdsed. ■

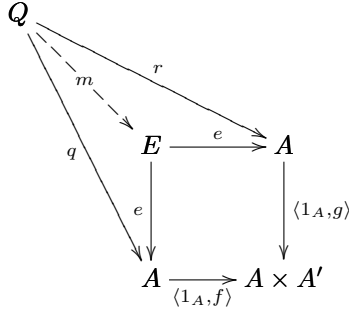
Lause 5.68. Olgu $\mathcal{A}$ lõplike korrutistega kategooria. Kui funktoir $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ säilitab tagasitõmbajaid, siis ta säilitab ka võrdsustajaid.

Tõestus. Olgu $(E, e) \approx \mathbf{Eq}(f, g)$, kus $f, g : A \rightarrow A'$ kategoorias $\mathcal{A}$. Olgu $(A \times A', p_1, p_2)$ objektide A ja A' korrutis. Siis leiduvad sellised üheselt määratud morfismid $\langle 1_A, f \rangle, \langle 1_A, g \rangle : A \rightarrow A \times A'$, et $p_1 \langle 1_A, f \rangle = 1_A = p_1 \langle 1_A, g \rangle$, $p_2 \langle 1_A, f \rangle = f$ ja $p_2 \langle 1_A, g \rangle = g$.

Näitame, et $(E, e, e) \approx \mathbf{Pb}(\langle 1_A, f \rangle, \langle 1_A, g \rangle)$. Kuna

$$\begin{aligned} p_1 \langle 1_A, f \rangle e &= e = p_1 \langle 1_A, g \rangle e, \\ p_2 \langle 1_A, f \rangle e &= f e = g e = p_2 \langle 1_A, g \rangle e, \end{aligned}$$

siis $\langle 1_A, f \rangle e = \langle 1_A, g \rangle e$. Kui $Q \in \mathcal{A}_0$ ja $q, r : Q \rightarrow A$ on sellised morfismid, et $\langle 1_A, f \rangle q = \langle 1_A, g \rangle r$, siis $q = p_1 \langle 1_A, f \rangle q = p_1 \langle 1_A, g \rangle r = r$ ja $f q = p_2 \langle 1_A, f \rangle q = p_2 \langle 1_A, g \rangle r = g r = g q$. Võrdsustaja (E, e) universaalomaduse tõttu leidub üheselt määratud morfism $m : Q \rightarrow E$ nii, et $em = q$. Seega tõepoolest $(E, e, e) \approx \mathbf{Pb}(\langle 1_A, f \rangle, \langle 1_A, g \rangle)$.



Eelduse põhjal on ka

$$\begin{array}{ccc} G(E) & \xrightarrow{G(e)} & G(A) \\ G(e) \downarrow & & \downarrow G(\langle 1_A, g \rangle) \\ G(A) & \xrightarrow{G(\langle 1_A, f \rangle)} & G(A \times A') \end{array} \quad (13)$$

konservatiivne ruut. Me peame näitama, et $(G(E), G(e)) \approx \mathbf{Eq}(G(f), G(g))$. Selleks oletame, et $G(f)b = G(g)b$ mingi morfismi $b : B \rightarrow G(A)$ korral kategoorias $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{ccccc} G(E) & \xrightarrow{G(e)} & G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(A') \\ & \nearrow & \nearrow & \searrow & \\ & b' & B & b & \end{array}$$

Siis

$$\begin{aligned} G(p_1)G(\langle 1_A, f \rangle)b &= b = G(p_1)G(\langle 1_A, g \rangle)b, \\ G(p_2)G(\langle 1_A, f \rangle)b &= G(f)b = G(g)b = G(p_2)G(\langle 1_A, g \rangle)b. \end{aligned}$$

Kuna kategoorias $\mathcal{A}$ on lõplikud korrutised, siis on temas ka lõppobjekt $\mathbf{1}$ (vt. lauset 5.8). Lause 5.37 põhjal on

$$\begin{array}{ccc} A \times A' & \xrightarrow{p_2} & A' \\ p_1 \downarrow & & \downarrow t_{A'} \\ A & \xrightarrow{t_A} & \mathbf{1} \end{array}$$

konservatiivne ruut ning eelduse põhjal on siis ka

$$\begin{array}{ccc} G(A \times A') & \xrightarrow{G(p_2)} & G(A') \\ G(p_1) \downarrow & & \downarrow G(t_{A'}) \\ G(A) & \xrightarrow{G(t_A)} & G(\mathbf{1}) \end{array}$$

konservatiivne ruut. Järelikult on morfismikolmik $G(p_1), G(p_2), G(t_A)G(p_1)$ samaaegselt vasakult taandav. Siis on samaaegselt vasakult taandav ka paar $G(p_1), G(p_2)$ ning me saame $G(\langle 1_A, f \rangle)b = G(\langle 1_A, g \rangle)b$. Kuna (13) on konservatiivne ruut, siis leidub üheselt määratud morfism $b' : B \rightarrow G(E)$ nii, et $G(e)b' = b$. Sellega oleme näidanud, et $(G(E), G(e)) \approx \text{Eq}(G(f), G(g))$. ■

Vaatleme veel piiride peegeldamist.

Definitsioon 5.69. Olgu $\mathcal{D}$ väike kategooria ning tähistame jälle $I = \mathcal{D}_0$. Öeldakse, et funktor $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ **peegeldab $\mathcal{D}$ -piire**, kui iga funktori $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ korral sellest, et $(L, (p_i)_{i \in I})$ on koonus funktoril F kategoorias $\mathcal{A}$ ja $(G(L), (G(p_i))_{i \in I})$ on $GF : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ piir, järeldub, et $(L, (p_i)_{i \in I})$ on F piir.

Definitsioon 5.70. Funktor $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ **peegeldab piire (peegeldab lõplikke piire)**, kui G peegeldab $\mathcal{D}$ -piire iga väikse kategooria (lõpliku kategooria) $\mathcal{D}$ korral.

Lause 5.71. Olgu $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ piire säilitav funktor. Kui $\mathcal{A}$ on täielik kategooria ja G peegeldab isomorfisme, siis G peegeldab piire.

Tõestus. Vaatleme funktoori $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$, kus $\mathcal{D}$ on väike kategooria ja $I = \mathcal{D}_0$. Olgu $(L, (p_i)_{i \in I}) \approx \lim F$, siis $(G(L), (G(p_i))_{i \in I}) \approx \lim(GF)$. Kui nüüd $(M, (q_i)_{i \in I}) \in \text{cone}(F)$ ja $(G(M), (G(q_i))_{i \in I}) \approx \lim(GF)$, siis kategoorias $\text{cone}(F)$ leidub üheselt määratud morfism $m : (M, (q_i)_{i \in I}) \rightarrow (L, (p_i)_{i \in I})$. Siis aga $G(m)$ on üheselt määratud morfism kategoorias $\text{cone}(GF)$ kahe lõppobjekti vahel ning seega $G(m)$ on isomorfism. Eelduse põhjal on ka m on isomorfism ja seega paar $(M, (q_i)_{i \in I})$ on funktoori F piir. ■

Lause 5.72. Täielik ja täpne funktor peegeldab piire.

Tõestus. Olgu funktor $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ täielik ja täpne, olgu $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ funktor, $(L, (p_i)_{i \in I}) \in \text{cone}(F)$ ja $(G(L), (G(p_i))_{i \in I}) \approx \lim(GF)$. Kui $(Q, (q_i)_{i \in I}) \in \text{cone}(F)$, siis leidub üheselt määratud morfism $b : G(Q) \rightarrow G(L)$ nii, et $G(p_i)b = G(q_i)$ iga $i \in I$ korral.

$$\begin{array}{ccc} & G(Q) & \\ G(q_i) \swarrow & \downarrow b & \searrow G(q_j) \\ & G(L) & \\ G(p_i) \swarrow & & \searrow G(p_j) \\ (GF)(i) & \xrightarrow{(GF)(d)} & (GF)(j) \end{array}$$

Kuna G on täielik, siis leidub selline $m : Q \rightarrow L$, et $b = G(m)$, ning kuna G on täpne, siis $p_i m = q_i$ iga $i \in I$ korral. Kui ka $p_i m' = q_i$ iga $i \in I$ korral, kus $m' : Q \rightarrow L$, siis $G(p_i)G(m') = G(q_i)$ iga $i \in I$ korral, millest b ühesuse tõttu järeldub, et $G(m') = b = G(m)$. Kuna G on täpne, siis $m = m'$. ■

Näited 5.73. 1. Unustav funktor $U : \text{Gr} \rightarrow \text{Set}$ peegeldab piire.

2. Unustav funktor kategooriast Top kategooriasse Set ei peegelda piire.

5.7. Piiride kommuteerumine

Selles paragrahvis tahame tõestada, et täielikus kategoorias kommuteeruvad suvalised piirid suvaliste piiridega. Alustuseks tõestame selle väite ühe erijuhu: korrutised kommuteeruvad võrdsustajatega. Selleks läheb meil vaja ühte lihtsat tulemust, mis järeldub vahetult korrutise definitsioonist.

Lause 5.74. Olgu I hulk ning olgu $(\prod_{i \in I} A_i, (p_i)_{i \in I})$ ja $(\prod_{i \in I} B_i, (q_i)_{i \in I})$ kategooria $\mathcal{A}$ objektide süsteemide $(A_i)_{i \in I}$ ja $(B_i)_{i \in I}$ korrutised. Kui $f_i : A_i \rightarrow B_i$, $i \in I$, on morfismid, siis leidub üheselt määratud morfism $\prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$, mis muudab kõik ruudud

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} A_i & \xrightarrow{\prod_{i \in I} f_i} & \prod_{i \in I} B_i \\ p_j \downarrow & & \downarrow q_j \\ A_j & \xrightarrow{f_j} & B_j \end{array}$$

kommutatiivseks.

Morfismi $\prod_{i \in I} f_i$ nimetatakse morfismide f_i , $i \in I$, **korrutiseks**.

Lause 5.75. Olgu $\mathcal{A}$ korrutistega kategooria ja I hulk. Kui iga $i \in I$ korral

$$(E_i, e_i) \approx \text{Eq}(f_i, g_i)$$

kategoorias $\mathcal{A}$, siis

$$\left(\prod_{i \in I} E_i, \prod_{i \in I} e_i \right) \approx \text{Eq} \left(\prod_{i \in I} f_i, \prod_{i \in I} g_i \right).$$

(S.t. võrdsustajate korrutis on korrutiste võrdsustaja.)

Tõestus. Vaatleme iga $j \in I$ korral diagrammi

$$\begin{array}{ccccc} \prod_{i \in I} E_i & \xrightarrow{\prod_{i \in I} e_i} & \prod_{i \in I} A_i & \xrightarrow[\prod_{i \in I} g_i]{\prod_{i \in I} f_i} & \prod_{i \in I} B_i \\ r_j \downarrow & & p_j \downarrow & & \downarrow q_j \\ E_j & \xrightarrow{e_j} & A_j & \xrightarrow[g_j]{f_j} & B_j \end{array}$$

kus r_j, p_j, q_j on vastavate korrutiste projektsioonid, vastavad ruudud on kommutatiivsed ja $f_j e_j = g_j e_j$ iga $j \in I$ korral. Siis

$$q_j \prod_{i \in I} f_i \prod_{i \in I} e_i = f_j p_j \prod_{i \in I} e_i = f_j e_j r_j = g_j e_j r_j = g_j p_j \prod_{i \in I} e_i = q_j \prod_{i \in I} g_i \prod_{i \in I} e_i,$$

millest lause 5.50 põhjal saame, et

$$\prod_{i \in I} f_i \prod_{i \in I} e_i = \prod_{i \in I} g_i \prod_{i \in I} e_i.$$

Oletame nüüd, et ka $e' : E' \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ on selline morfism, et $(\prod_{i \in I} f_i)e' = (\prod_{i \in I} g_i)e'$. Siis iga $j \in J$ korral

$$f_j(p_j e') = q_j(\prod_{i \in I} f_i)e' = q_j(\prod_{i \in I} g_i)e' = g_j(p_j e').$$

Kuna $(E_j, e_j) \approx \text{Eq}(f_j, g_j)$, siis iga $j \in I$ korral leidub üheselt määratud morfism $k_j : E' \rightarrow E_j$ nii, et $p_j e' = e_j k_j$.

$$\begin{array}{ccccc} E_j & \xrightarrow{e_j} & A_j & \xrightarrow[g_j]{f_j} & B_j \\ r_j \uparrow & \nwarrow k_j & \uparrow p_j e' & & \\ \prod_{i \in I} E_i & \xleftarrow{\langle k_i \rangle} & E' & & \end{array}$$

Kasutades korrutise $\prod_{i \in I} E_i$ universaalomadust saame sellise üheselt määratud morfismi $\langle k_i \rangle : E' \rightarrow \prod_{i \in I} E_i$, et $r_j \langle k_i \rangle = k_j$ iga $j \in I$ korral. Järelikult

$$p_j \left(\prod_{i \in I} e_i \right) \langle k_i \rangle = e_j r_j \langle k_i \rangle = e_j k_j = p_j e'$$

iga $j \in I$ korral, kust projektsioone p_j taandades saame võrduse $(\prod_{i \in I} e_i) \langle k_i \rangle = e'$.

Kui oletame, et ka $k : E' \rightarrow \prod_{i \in I} E_i$ on selline, et $(\prod_{i \in I} e_i)k = e'$, siis

$$e_j r_j \langle k_i \rangle = p_j e' = p_j \left(\prod_{i \in I} e_i \right) k = e_j r_j k$$

iga $j \in I$ korral. Et e_j on monomorfism (vt. lauset 5.26), siis $r_j \langle k_i \rangle = r_j k$ iga $j \in I$ korral. Lause 5.50 põhjal $\langle k_i \rangle = k$. ■

Näide 5.76. Illustreerime lauset 5.75 ühe konkreetse näitega kategoorias **Set**. Vaatleme võrdsustajaid

$$E_1 \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightleftharpoons[g_1]{f_1} B_1$$

ja

$$E_2 \xrightarrow{e_2} A_2 \xrightleftharpoons[g_2]{f_2} B_2 ,$$

kus

$$\begin{aligned} E_1 &= \{a_1 \in A_1 \mid f_1(a_1) = g_1(a_1)\}, \\ E_2 &= \{a_2 \in A_2 \mid f_2(a_2) = g_2(a_2)\} \end{aligned}$$

ning e_1, e_2 on sisestused. Siis ka

$$E_1 \times E_2 \xrightarrow{e_1 \times e_2} A_1 \times A_2 \xrightleftharpoons[g_1 \times g_2]{f_1 \times f_2} B_1 \times B_2$$

on võrdsustaja, sest

$$\begin{aligned} (f_1 \times f_2)(a_1, a_2) &= (g_1 \times g_2)(a_1, a_2) \iff (f_1(a_1), f_2(a_2)) = (g_1(a_1), g_2(a_2)) \\ &\iff f_1(a_1) = g_1(a_1) \text{ ja } f_2(a_2) = g_2(a_2) \\ &\iff (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2. \end{aligned}$$

Vaatleme nüüd üldjuhtu. Olgu $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ funktor. Eesmärgiks on tõestada, et

$$\lim_{C \in \mathcal{C}_0} \left(\lim_{D \in \mathcal{D}_0} F(C, D) \right) \cong \lim_{D \in \mathcal{D}_0} \left(\lim_{C \in \mathcal{C}_0} F(C, D) \right)$$

ehk lühidalt $\lim_J (\lim_I F(j, i)) \cong \lim_I (\lim_J F(j, i))$, kus $i \in I = \mathcal{D}_0$ ja $j \in J = \mathcal{C}_0$. Selgitame, mida mõeldakse selles valemis esinevate piiride all.

Iga fikseeritud objekti $j \in J$ korral on olemas funktor $F(j, -) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$, mis on defineeritud võrdustega

$$\begin{aligned} F(j, -)(i) &:= F(j, i), \\ F(j, -)(d) &:= F(1_j, d), \end{aligned}$$

iga $i \in I$ ja iga $\mathcal{D}$ morfismi d korral. Sümboliga $\lim_I F(j, i)$ tähistame funktori $F(j, -)$ piirojekti. Iga $j \in J$ korral olgu

$$\left(\lim_I F(j, i), (p_i^j)_{i \in I} \right) \approx \lim F(j, -), \quad (14)$$

Kui $c : j \rightarrow j'$ kategoorias $\mathcal{C}$, siis kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i \rightarrow i'$ korral on väike kolmnurk ja trapets diagrammis

$$\begin{array}{ccc}
& \lim_I F(j, i) & \\
p_i^j \swarrow & & \searrow p_{i'}^j \\
F(j, i) & \xrightarrow{F(1_j, d)} & F(j, i') \\
F(c, 1_i) \swarrow & & \searrow F(c, 1_{i'}) \\
F(j', i) & \xrightarrow{F(1_{j'}, d)} & F(j', i')
\end{array}$$

kommutatiivsed, järelikult on kommutatiivne ka suur kolmnurk. See aga tähendab, et

$$\left(\lim_I F(j, i), (F(c, 1_i)p_i^j)_{i \in I} \right) \in \text{cone} F(j', -).$$

Kuna kehtib (14), siis leidub üheselt määratud morfism $\lim_I F(c, 1_i) : \lim_I F(j, i) \rightarrow \lim_I F(j', i)$ nii, et $p_i^{j'} \lim_I F(c, 1_i) = F(c, 1_i)p_i^j$ iga $i \in I$ korral. Kui kõigil funktoritel $F(j, -)$ on piir olemas, siis saame defineerida uue funktori $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ võrdustega

$$L(j) := \lim_I F(j, i), \quad (15)$$

$$L(c) := \lim_I F(c, 1_i), \quad (16)$$

kus $j \in J$ ja c on morfism kategoorias $\mathcal{C}$. Seega $L(c)$ on üheselt määratud morfism, mille korral

$$p_i^{j'} L(c) = F(c, 1_i)p_i^j.$$

$$\begin{array}{ccc}
\lim_I F(j, i) & \xrightarrow{L(c)} & \lim_I F(j', i) \\
p_i^j \downarrow & & \downarrow p_{i'}^{j'} \\
F(j, i) & \xrightarrow{F(c, 1_i)} & F(j', i)
\end{array}$$

Näitamaks, et L on tõesti funktor, vaatleme morfisme $c : j \rightarrow j'$, $c' : j' \rightarrow j''$ kategoorias $\mathcal{C}$. Siis

$$p_i^{j''} L(c')L(c) = F(c', 1_i)p_i^{j'} L(c) = F(c', 1_i)F(c, 1_i)p_i^j = F(c'c, 1_i)p_i^j,$$

millest tänu $L(c'c)$ ühesusele järeldub, et $L(c'c) = L(c')L(c)$. Samuti $L(1_j) = 1_{L(j)}$.

Oletame, et funktoiril $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ on olemas piir

$$\left(\lim_J (\lim_I F(j, i)), (p_j)_{j \in J} \right) \approx \lim L.$$

Analoogiliselt võime rääkida funktoitest $F(-, i) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, iga objekti $i \in I$ korral piiridest

$$\left(\lim_J F(j, i), (q_j^i)_{j \in J} \right) \approx \lim F(-, i),$$

defineerida funktori $M : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ objektile $i \in I$ võrdusega

$$M(i) := \lim_J F(j, i)$$

ja morfismil $d : i \rightarrow i'$ nii, et $M(d) = \lim_J F(1_j, d) : \lim_J F(j, i) \rightarrow \lim_J F(j, i')$ on üheselt määratud morfism, mille korral

$$q_j^{i'} M(d) = F(1_j, d)q_j^i.$$

$$\begin{array}{ccc}
\lim_J F(j, i) & \xrightarrow{M(d)} & \lim_J F(j, i') \\
q_j^i \downarrow & & \downarrow q_j^{i'} \\
F(j, i) & \xrightarrow{F(1_j, d)} & F(j, i')
\end{array}$$

Funktori M piir olgu

$$\left(\lim_I (\lim_J F(j, i)), (q_i)_{i \in I} \right) \approx \lim M.$$

Osutub, et objektide $\lim_J (\lim_I F(j, i))$ ja $\lim_I (\lim_J F(j, i))$ vahel leiduvad kanoonilised morfismid, mis on isomorfismid. Selle näitamiseks fikseerime $i \in I$. Siis iga $c : j \rightarrow j'$ korral kategoorias $\mathcal{C}$ on väike kolmnurk ja trapets diagrammis

$$\begin{array}{ccc} \lim_J (\lim_I F(j, i)) & & \\ p_j \swarrow & & \searrow p_{j'} \\ \lim_I F(j, i) & \xrightarrow{L(c)} & \lim_I F(j', i) \\ p_i^j \swarrow & & \searrow p_i^{j'} \\ F(j, i) & \xrightarrow{F(c, 1_i)} & F(j', i) \end{array}$$

kommutatiivsed, järelikult on ka suur kolmnurk kommutatiivne, s.t.

$$\left(\lim_J (\lim_I F(j, i)), (p_i^j p_j)_{j \in J} \right) \in \text{cone} F(-, i).$$

$$\begin{array}{ccc} \lim_J (\lim_I F(j, i)) & & \\ p_i^j p_j \swarrow & \lambda_i \downarrow & \searrow p_i^{j'} \\ q_j^i \swarrow & \lim_J F(j, i) & \searrow q_{j'}^i \\ F(j, i) & \xrightarrow{F(c, 1_i)} & F(j', i) \end{array}$$

Järelikult leidub üheselt määratud morfism $\lambda_i : \lim_J (\lim_I F(j, i)) \rightarrow \lim_J F(j, i)$ nii, et $q_j^i \lambda_i = p_i^j p_j$ iga $j \in J$ korral. Kui $d : i \rightarrow i'$ on morfism kategoorias $\mathcal{D}$, siis iga $j \in J$ korral

$$q_j^{i'} M(d) \lambda_i = F(1_j, d) q_j^i \lambda_i = F(1_j, d) p_i^j p_j = p_i^{j'} p_j = q_j^{i'} \lambda_{i'}.$$

Lauset 5.50 kasutades saame järeldada, et $M(d) \lambda_i = \lambda_{i'}$. Seega leidub üheselt määratud morfism $\lambda : \lim_J (\lim_I F(j, i)) \rightarrow \lim_I (\lim_J F(j, i))$ nii, et $q_i \lambda = \lambda_i$ iga $i \in I$ korral.

$$\begin{array}{ccc} \lim_J (\lim_I F(j, i)) & & \\ \lambda_i \swarrow & \lambda \downarrow & \searrow \lambda_{i'} \\ q_i \swarrow & \lim_I (\lim_J F(j, i)) & \searrow q_{i'} \\ \lim_J F(j, i) & \xrightarrow{M(d)} & \lim_J F(j, i') \end{array}$$

Analoogiliselt leidub iga $j \in J$ korral üheselt määratud morfism $\mu_j : \lim_I (\lim_J F(j, i)) \rightarrow \lim_I F(j, i)$ nii, et $p_i^j \mu_j = q_i^j q_i$ iga $i \in I$ korral, ning selline üheselt määratud morfism $\mu : \lim_I (\lim_J F(j, i)) \rightarrow \lim_J (\lim_I F(j, i))$, et $p_j \mu = \mu_j$ iga $j \in J$ korral.

$$\begin{array}{ccc} \lim_I (\lim_J F(j, i)) & & \\ \mu_j \swarrow & \mu \downarrow & \searrow \mu_{j'} \\ p_j \swarrow & \lim_J (\lim_I F(j, i)) & \searrow p_{j'} \\ \lim_I F(j, i) & \xrightarrow{L(c)} & \lim_I F(j', i) \end{array}$$

Seega

$$q_j^i q_i \lambda \mu = q_j^i \lambda_i \mu = p_j^j p_j \mu = p_i^j \mu_j = q_j^i q_i,$$

iga $i \in I$, $j \in J$ korral, millest saame, et $\lambda \mu = 1$. Analoogiliselt saab tõestada võrduse $\mu \lambda = 1$. Sellega oleme tõestanud järgmise tulemuse.

Teoreem 5.77. Olgu $\mathcal{A}$ täielik kategooria, $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ väiksed kategooriad, $J = \mathcal{C}_0, I = \mathcal{D}_0$, ja olgu $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ funktor. Siis

$$\lim_J \left(\lim_I F(j, i) \right) \cong \lim_I \left(\lim_J F(j, i) \right).$$

Näide 5.78. Veendume, et lause 5.75 (objektide tasemel) on tõesti teoreemi 5.77 erijuhuks. Selleks olgu $\mathcal{C}$ kaheobjektiline kategooria $1 \xrightarrow[c_2]{c_1} 0$, $\mathcal{D}$ olgu diskreetne kategooria objektide hulgaga I ja $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ olgu suvaline funktor. Tähistame $F(1, i) =: A_i$, $F(0, i) =: B_i$, $F(c_1, i) =: f_i$ ja $F(c_2, i) =: g_i$ iga $i \in I$ korral.

Siis funktori $F(1, -) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ kujutis on süsteem $(A_i)_{i \in I}$ ja funktori $F(0, -) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ kujutis on süsteem $(B_i)_{i \in I}$. Nende funktorite piirid on vastavate süsteemide korrutised. Funktor $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ viib

$$\text{diagrammi } 1 \xrightarrow[c_2]{c_1} 0 \quad \text{diagrammiks } \prod_{i \in I} A_i \xrightarrow[\prod_{i \in I} g_i]{\prod_{i \in I} f_i} \prod_{i \in I} B_i,$$

seega tema piir on $\text{Eq}(\prod_{i \in I} f_i, \prod_{i \in I} g_i)$.

Funktorite $F(-, i) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, $i \in I$, kujutised on diagrammid $A_i \xrightarrow[g_i]{f_i} B_i$. Nende piirid on paaride (f_i, g_i) võrdsustajad (E_i, e_i) . Funktor $M : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ on antud võrdustega $M(i) = E_i$, $i \in I$, ja funktori M piir on objektide E_i korrutis.

Näide 5.79. Kui $\mathcal{C}$ on diskreetne kategooria objektide hulgaga $\mathcal{C}_0 = \{0, 1, 2\}$ ja $\mathcal{D}$ tema alamkategooria, $\mathcal{D}_0 = \{0, 1\}$, siis tähistades tähistades funktori $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ korral $F(j, i) =: F_{ji} \in \mathcal{A}_0$, saame teoreemist 5.77, et

$$(F_{00} \times F_{10} \times F_{20}) \times (F_{01} \times F_{11} \times F_{21}) \cong (F_{00} \times F_{01}) \times (F_{10} \times F_{11}) \times (F_{20} \times F_{21}).$$

Näide 5.80. Suvalised piirid ei kommuteeru suvaliste kopiiridega. Näiteks diskreetsete kategooriate $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$, kus $J = \mathcal{C}_0$ ja $I = \mathcal{D}_0$, korral tähendaks $\mathcal{C}$ -kopiiride kommuteerumine $\mathcal{D}$ -piiridega isomorfismi

$$\coprod_{j \in J} \left(\prod_{i \in I} F_{ji} \right) \cong \prod_{i \in I} \left(\coprod_{j \in J} F_{ji} \right).$$

Kui $I = J = \{1, 2\}$ ja $\mathcal{A} = \text{Set}$, siis peaks

$$(F_{11} \times F_{12}) \sqcup (F_{21} \times F_{22}) \cong (F_{11} \sqcup F_{21}) \times (F_{12} \sqcup F_{22}).$$

Viimane enamasti ei kehti, sest

$$(F_{11} \sqcup F_{21}) \times (F_{12} \sqcup F_{22}) = (F_{11} \times F_{12}) \sqcup (F_{11} \times F_{22}) \sqcup (F_{21} \times F_{12}) \sqcup (F_{21} \times F_{22}).$$

5.8. Filtreeritud kopiirid

Definitsioon 5.81. Kategooriat $\mathcal{A}$ nimetatakse **filtreerituks**, kui

1. $\mathcal{A}$ ei ole tühi;
2. $(\forall A, B \in \mathcal{A}_0)(\exists C \in \mathcal{A}_0)(\exists f : A \rightarrow C)(\exists g : B \rightarrow C)$;
3. $(\forall A, B \in \mathcal{A}_0)(\forall f, g : A \rightarrow B)(\exists C \in \mathcal{A}_0)(\exists h : B \rightarrow C)(hf = hg)$.

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & \nearrow f & \nwarrow g \\ A & & B \end{array} \quad A \xrightarrow[g]{f} B \xrightarrow{h} C$$

Märkus 5.82. Induktsiooniga on lihtne tõestada, et kui $\mathcal{A}$ on filtreeritud kategooria, siis

1. $\mathcal{A}$ objektide iga lõpliku süsteemi $(A_i)_{i \in I}$ jaoks leidub objekt $A \in \mathcal{A}_0$ ja morfismide süsteem $(f_i : A_i \rightarrow A)_{i \in I}$;
2. $\mathcal{A}$ paralleelsete morfismide iga lõpliku süsteemi $(f_i : A \rightarrow B)_{i \in I}$ jaoks leidub objekt C ja morfismid $k : B \rightarrow C, l : A \rightarrow C$ nii, et $kf_i = l$ iga $i \in I$ korral.

Näide 5.83. 1. Iga lõplikult kotäielik kategooria on filtreeritud.

2. Iga kategooria, milles leidub lõppobjekt, on filtreeritud.
3. Järjestatud hulk, mida vaadeldakse kategooriana, on filtreeritud parajasti siis, kui selles järjestatud hulgas leidub mistahes kahel elemendil ülemine tõke.

Lõpliku kategooria all mõtleme kategooriat, kus on lõplik arv objekte ja morfisme.

Lemma 5.84. Olgu $\mathcal{A}$ filtreeritud kategooria. Iga lõpliku kategooria $\mathcal{D}$ korral leidub igal funktil $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ kokoonus.

Tõestus. Tähistame $I = \mathcal{D}_0$. Märkuse 5.82 põhjal saame leida objekti $A \in \mathcal{A}_0$ ja $\mathcal{A}$ morfismide süsteemi $(f_i : F(i) \rightarrow A)_{i \in I}$. Kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i' \rightarrow i$ korral saame paralleelsete morfismide paari $f_{i'}, f_i F(d) : F(i') \rightarrow A$ jaoks leida sellise objekti $A_d \in \mathcal{A}_0$ ja morfismi $g_d : A \rightarrow A_d$, et $g_d f_{i'} = g_d f_i F(d)$. Et $(A_d)_{d \in \mathcal{D}_1}$ on lõplik objektide süsteem, siis leidub objekt $A' \in \mathcal{A}_0$ ja morfismide süsteem $(h_d : A_d \rightarrow A')_{d \in \mathcal{D}_1}$. Nüüd $(h_d g_d : A \rightarrow A')_{d \in \mathcal{D}_1}$ on paralleelsete morfismide lõplik süsteem. Seega leidub selline objekt $A'' \in \mathcal{A}_0$ ja morfismid $k : A' \rightarrow A'', l : A \rightarrow A''$, et $kh_d g_d = l$ kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi d korral.

$$\begin{array}{ccc}
 A' & \xrightarrow{k} & A'' \\
 \uparrow h_d & & \uparrow l \\
 A_d & \xrightarrow{g_d} & A \\
 \uparrow f_i & & \uparrow f_{i'} \\
 F(i) & \xrightarrow{F(d)} & F(i')
 \end{array}$$

Osutub, et $(A'', (lf_i)_{i \in I}) \in \text{cocone}(F)$. Tõepoolest, $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i' \rightarrow i$ korral

$$lf_i F(d) = kh_d g_d f_i F(d) = kh_d g_d f_{i'} = lf_{i'}.$$

■

Järgnevas lauses anname konstruktsiooni, mille abil saab konstrueerida funktil $F : \rightarrow \text{Set}$ kopiiri.

Lause 5.85. Olgu $\mathcal{C}$ väike filtreeritud kategooria, $J = \mathcal{C}_0$ ja $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ funktil. Funktil F kopiir on $(L, (u_j)_{j \in J})$, kus

1. $L = \left(\coprod_{j \in J} F(j) \right) / \sim$ ja ekvivalentsiseos $\sim$ on defineeritud järgmiselt: iga $x \in F(j)$ ja $x' \in F(j')$ korral

$$x \sim x' \iff (\exists j'' \in J)(\exists c : j \rightarrow j'')(\exists c' : j' \rightarrow j'')(F(c)(x) = F(c')(x')),$$

2. kujutused $u_j : F(j) \rightarrow L$ on defineeritud võrdustega

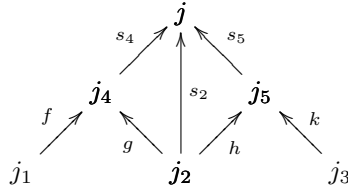
$$u_j(x) := [x],$$

kus $[x]$ on elemendi x ekvivalentsiklass seose $\sim$ järgi.

Tõestus. Seos $\sim$ on defineeritud hulkade $F(j)$, $j \in J$, lõikumatul ühendil (mis teatavasti on ka nende kokorutis). Selle definitsiooni illustreerib järgmine diagramm kategoorias Set :

$$x \in F(j) \xrightarrow{F(c)} F(j'') \xleftarrow{F(c')} F(j') \ni x'.$$

Peame näitama, et seos $\sim$ on ekvivalentsiseos. Refleksiivsus ja sümmeetria on ilmne. Transitiivsuse kontrollimiseks oletame, et $x_1 \sim x_2$ ja $x_2 \sim x_3$, kus $x_i \in F(j_i)$, $i = 1, 2, 3$.



Siis leiduvad objektid $j_4, j_5 \in J$ ja morfismid $f : j_1 \rightarrow j_4$, $g : j_2 \rightarrow j_4$, $h : j_2 \rightarrow j_5$, $k : j_3 \rightarrow j_5$ nii, et $F(f)(x_1) = F(g)(x_2)$ ja $F(h)(x_2) = F(k)(x_3)$. Lemma 5.84 tõttu leidub objektidest j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 ja morfismidest f, g, h, k koosneval diagrammil kokoonus $(j, (s_i : j_i \rightarrow j)_{i \in \{1,2,3,4,5\}})$. Siis muuhulgas

$$\begin{aligned} F(s_4 f)(x_1) &= F(s_4)(F(f)(x_1)) = F(s_4)(F(g)(x_2)) = F(s_4 g)(x_2) = F(s_2)(x_2) = F(s_5 h)(x_2) \\ &= F(s_5)(F(h)(x_2)) = F(s_5)(F(k)(x_3)) = F(s_5 k)(x_3), \end{aligned}$$

s.t. $x_1 \sim x_3$. Seega $\sim$ on ekvivalentsiseos.

Kui $c : j \rightarrow j'$ on morfism kategoorias $\mathcal{C}$ ja $x \in F(j)$, siis võrduse $F(c)(x) = F(1_{j'})(F(c)(x))$ tõttu $x \sim F(c)(x)$ ja seega

$$(u_{j'} F(c))(x) = u_{j'}(F(c)(x)) = [F(c)(x)] = [x] = u_j(x).$$

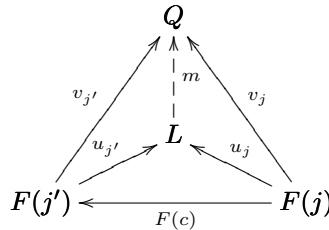
Järelikult $(L, (u_j)_{j \in J}) \in \text{cocone}(F)$. Kui ka $(Q, (v_j)_{j \in J}) \in \text{cocone}(F)$, siis defineerime kujutuse $m : L \rightarrow Q$ võrdusega

$$m([x]) := v_j(x),$$

kus $x \in F(j)$. Kui $x \sim x'$, $x \in F(j)$, $x' \in F(j')$, siis $F(c)(x) = F(c')(x')$ mingite morfismide $c : j \rightarrow j''$, $c' : j' \rightarrow j''$ korral. Järelikult

$$v_j(x) = (v_{j''} F(c))(x) = (v_{j''} F(c'))(x') = v_{j'}(x')$$

ja m on korrektselt defineeritud. Ilmselt $mu_j = v_j$ iga $j \in J$ korral ja m on üheselt määratud.



■

Eespool nägime, et üldjuhul piirid ei kommuteeru kopiiridega. Tuleb välja, et teatud eeldustel lõplikud piirid kommuteeruvad filtreeritud kopiiridega.

Teoreem 5.86. Olgu $\mathcal{C}$ väike filtreeritud kategooria ja $\mathcal{D}$ lõplik kategooria, $J = \mathcal{C}_0$, $I = \mathcal{D}_0$. Kui $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$ on funktor, siis

$$\text{colim}_J \left(\lim_I F(j, i) \right) \cong \lim_I \left(\text{colim}_J F(j, i) \right)$$

(s.t. lõplikud piirid kategoorias Set kommuteeruvad filtreeritud kopiiridega).

Tõestus. Piisab, kui näidata, et isomorfism leidub kanoonilise kopiiri ja piiri vahel. Iga $j \in J$ korral on funktori $F(j, -) : \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$ kanooniline piir teoreemi 5.54 põhjal hulk

$$\lim_I F(j, i) = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in F(j, i), (\forall d \in \mathcal{D}(i, i'))(F(1_j, d)(x_i) = x_{i'})\}.$$

koos projektsioonidega $p_i^j : \lim_I F(j, i) \rightarrow F(j, i)$, $i \in I$. Vaatleme võrdustega (15) ja (16) defineeritud funktorit $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$. Meenutame, et iga $\mathcal{C}$ morfismi $c : j \rightarrow j'$ korral $L(c)$ on üheselt määratud morfism, mille korral diagramm

$$\begin{array}{ccc} \lim_I F(j, i) & \xrightarrow{L(c)} & \lim_I F(j', i) \\ p_i^j \downarrow & & \downarrow p_i^{j'} \\ F(j, i) & \xrightarrow{F(c, 1_i)} & F(j', i) \end{array}$$

on kommutatiivne. Seega iga $(x_i)_{i \in I} \in \lim_I F(j, i)$ korral $L(c)((x_i)_{i \in I}) = (F(c, 1_i)(x_i))_{i \in I}$. Funktori $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ kopiir on lause 5.85 põhjal

$$\operatorname{colim}_J \left(\lim_I F(j, i) \right) = \left(\prod_{j \in J} \lim_I F(j, i) \right) / \sim,$$

kus seos $\sim$ on defineeritud järgmiselt: iga $(x_i)_{i \in I} \in \lim_I F(j, i)$ ja $(x'_i)_{i \in I} \in \lim_I F(j', i)$ korral

$$\begin{aligned} (x_i)_{i \in I} \sim (x'_i)_{i \in I} &\iff (\exists j'' \in J)(\exists c : j \rightarrow j'')(\exists c' : j' \rightarrow j'')(L(c)((x_i)_{i \in I}) = L(c')((x'_i)_{i \in I})) \\ &\iff (\exists j'' \in J)(\exists c : j \rightarrow j'')(\exists c' : j' \rightarrow j'')(\forall i \in I)(F(c, 1_i)(x_i) = F(c', 1_i)(x'_i)). \end{aligned}$$

Iga objekti $i \in I$ korral funktori $F(-, i) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ kanooniline kopiir on

$$\operatorname{colim}_J F(j, i) = \left(\prod_{j \in J} F(j, i) \right) / \approx_i,$$

kus seos $\approx_i$ on defineeritud järgmiselt: iga $y \in F(j, i)$ ja $y' \in F(j', i)$ korral

$$y \approx_i y' \iff (\exists j'' \in J)(\exists c : j \rightarrow j'')(\exists c' : j' \rightarrow j'')(F(c, 1_i)(y) = F(c', 1_i)(y')).$$

Ekvivalentsiklasse seose $\approx_i$ järgi tähistame $[y]_i$. Kopiiri sisestused on $q_j^i : F(j, i) \rightarrow \operatorname{colim}_J F(j, i)$, $y \mapsto [y]_i$, $j \in J$. Vaatleme funktorit $M : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$, mille korral

$$M(i) := \operatorname{colim}_J F(j, i),$$

$i \in I$, ja iga $\mathcal{D}$ morfismi $d : i \rightarrow i'$ korral $M(d)$ on defineeritud kui üheselt määratud morfism, mis muudab diagrammi

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{colim}_J F(j, i) & \xrightarrow{M(d)} & \operatorname{colim}_J F(j, i') \\ q_j^i \uparrow & & \uparrow q_j^{i'} \\ F(j, i) & \xrightarrow{F(1_j, d)} & F(j, i') \end{array}$$

kommutatiivseks. Seega $M(d)$ on defineeritud võrdusega

$$M(d)([y]_i) := [F(1_j, d)(y)]_{i'}$$

iga $y \in F(j, i)$ korral. Funktori M kanooniline piir on

$$\lim_I \left(\operatorname{colim}_J F(j, i) \right) = \left\{ ([y_i]_i)_{i \in I} \mid [y_i]_i \in \left(\prod_{j \in J} F(j, i) \right) / \approx_i, (\forall d \in \mathcal{D}(i, i')) (F(1_j, d)(y_i) \approx_{i'} y_{i'}) \right\}.$$

Defineerime kujutuse

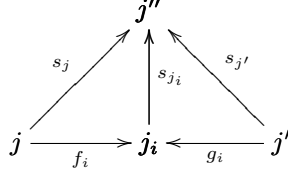
$$\lambda : \operatorname{colim}_J \left(\lim_I F(j, i) \right) \longrightarrow \lim_I \left(\operatorname{colim}_J F(j, i) \right)$$

võrdusega

$$\lambda([(x_i)_{i \in I}]) := ([x_i]_i)_{i \in I}$$

iga $(x_i)_{i \in I} \in \lim_I F(j, i)$ korral. Kuna iga $i \in I$ korral $x_i \in F(j, i)$ ja iga $\mathcal{D}$ morfismi $d : i \rightarrow i'$ korral $F(1_j, d)(x_i) = x_{i'}$, siis $([x_i]_i)_{i \in I} \in \lim_I (\text{colim}_J F(j, i))$.

Näitame, et λ on injektiivne. Selleks oletame, et $(x_i)_{i \in I} \in \lim_I F(j, i)$ ja $(x'_i)_{i \in I} \in \lim_I F(j', i)$ korral $([x_i]_i)_{i \in I} = ([x'_i]_i)_{i \in I}$ ehk $x_i \approx_i x'_i$ iga $i \in I$ korral. Siis iga $i \in I$ jaoks leidub $j_i \in J$ ja sellised morfismid $f_i : j \rightarrow j_i$, $g_i : j' \rightarrow j_i$, et $F(f_i, 1_i)(x_i) = F(g_i, 1_i)(x'_i)$. Lemma 5.84 põhjal leidub kokoonus $(j'', (s_i)_{i \in I})$ morfismidest f_i, g_i , $i \in I$, koosneval diagrammil.



Järelikult iga $i \in I$ korral $s_{j_i} f_i = s_j$ ja $s_{j_i} g_i = s_{j'}$ ning seega

$$F(s_j, 1_i)(x_i) = F(s_{j_i}, 1_i)(F(f_i, 1_i)(x_i)) = F(s_{j_i}, 1_i)(F(g_i, 1_i)(x'_i)) = F(s_{j'}, 1_i)(x'_i).$$

See aga tähendab, et $(x_i)_{i \in I} \sim (x'_i)_{i \in I}$, millega λ injektiivsus on tõestatud.

Näitame, et λ on surjektiivne. Olgu $([y_i]_i)_{i \in I} \in \lim_I (\text{colim}_J F(j, i))$, kus $y_i \in F(j_i, i)$. Paneme tähele, et seose $\approx_i$ definitsiooni põhjal

$$(\forall i \in I)(\forall f \in \mathcal{C}(j', j))(\forall z \in F(j', i))(z \approx_i F(f, 1_i)(z)).$$

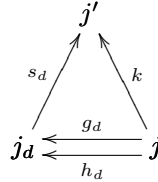
Lemma 5.84 tõttu saame leida objekti $j \in J$ ja morfismide süsteemi $(f_i : j_i \rightarrow j)_{i \in I}$. Kui $d : i \rightarrow i'$ on morfism kategoorias $\mathcal{D}$, siis

$$F(f_i, d)(y_i) = F(f_i, 1_{i'}) (F(1_{j_i}, d)(y_i)) \approx_{i'} F(1_{j_i}, d)(y_i) \approx_{i'} y_{i'} \approx_{i'} F(f_{i'}, 1_{i'})(y_{i'}).$$

Seose $\approx_{i'}$ definitsiooni põhjal leidub iga $d : i \rightarrow i'$ jaoks objekt $j_d \in J$ ja sellised morfismid $g_d, h_d : j \rightarrow j_d$, et

$$F(g_d f_i, d)(y_i) = F(g_d, 1_{i'}) (F(f_i, d)(y_i)) = F(h_d, 1_{i'}) (F(f_{i'}, 1_{i'})(y_{i'})) = F(h_d f_{i'}, 1_{i'})(y_{i'}). \quad (17)$$

Rakendades lemmat 5.84 diagrammile, mis koosneb kõigist morfismidest g_d, h_d , kus $d \in \mathcal{D}_1$, saame leida objekti j' ja morfismid $k : j \rightarrow j'$ ja $s_d : j_d \rightarrow j'$ iga $d \in \mathcal{D}_1$ jaoks, nii et $s_d g_d = k = s_d h_d$ iga $d \in \mathcal{D}_1$ korral.



Siis aga võrduse (17) tõttu

$$F(k f_i, d)(y_i) = F(s_d, 1_{i'}) (F(g_d f_i, d)(y_i)) = F(s_d, 1_{i'}) (F(h_d f_{i'}, 1_{i'})(y_{i'})) = F(k f_{i'}, 1_{i'})(y_{i'})$$

iga morfismi $d : i \rightarrow i'$ korral. Tähistades $x_i := F(k f_i, 1_i)(y_i) \in F(j', i)$, $i \in I$, saame arvutada:

$$F(1_j, d)(x_i) = F(k f_i, d)(y_i) = F(k f_{i'}, 1_{i'})(y_{i'}) = x_{i'}$$

iga morfismi $d : i \rightarrow i'$ korral. Seega $(x_i)_{i \in I} \in \lim_I F(j, i)$ ning $[(x_i)_{i \in I}] \in \text{colim}_J (\lim_I F(j, i))$. Lisaks sellele

$$\lambda([(x_i)_{i \in I}]) = ([x_i]_i)_{i \in I} = ([F(k f_i, 1_i)(y_i)]_i)_{i \in I} = ([y_i]_i)_{i \in I},$$

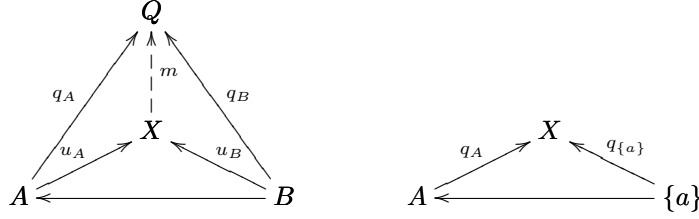
mis tähendab, et λ on surjektiivne. ■

Näide 5.87. Kategoorias **Set** vaatleme hulka X ja diagrammi $\mathcal{C}$, mis koosneb hulga X lõplikest alamhulkadest ja nende vahelistest sisestustest. See diagramm on filtreeritud, sest $\emptyset$ on hulga X lõplik alamhulk, kahe lõpliku alamhulga ühend on lõplik alamhulk ja selles diagrammis ei ole kahte erinevat paralleelset morfismi. Näitame, et hulk X on selle diagrammi kopeer.

Ilmselt $(X, (u_A)_{A \in \mathcal{C}_0})$, kus $u_A : A \rightarrow X$ on sisestused, on kokoonus. Oletame, et ka $(Q, (q_A)_{A \in \mathcal{C}_0})$ on kokoonus. Defineerime kujutuse $m : X \rightarrow Q$ võrdusega

$$m(x) := q_{\{x\}}(x).$$

Kui $A \subseteq X$ on lõplik alamhulk ja $a \in A$, siis $q_A(a) = q_{\{a\}}(a) = m(a) = (mu_A)(a)$. Seega $q_A = mu_A$.



Näide 5.88. Analoogiliselt eelmise näitega saab näidata, et iga Abeli rühm on oma lõplikult tekitatud alamrühmade filtreeritud kopiir.

Näide 5.89. Filtreeritud kopiiride abil saab kirjeldada teatud omadustega algebraliste struktuuride ehitust. Näiteks iga tugevalt lame polügoon on esitatav lõplikult moodustatud vabade polügoonide filtreeritud kopiirina.

5.9. Piirid funktorite kategoorias

Selles paragrahvis uurime, kuidas leida piire funktorite kategooriates.

Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ kategooriad ning $F : \mathcal{D} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ funktor. Tähistame $I = \mathcal{D}_0$ ja $J = \mathcal{C}_0$. Vaatleme fikseeritud $j \in J$ korral eeskirja

$$F(-)(j) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$\begin{array}{ccc} i & \xrightarrow{\quad} & F(i)(j) \\ d \downarrow & & \downarrow F(d)_j \\ i' & \xrightarrow{\quad} & F(i')(j) \end{array},$$

kus $F(d)_j$ on loomuliku teisenduse $F(d) : F(i) \Rightarrow F(i')$ j -komponent. Kui $d : i \rightarrow i'$, $d' : i' \rightarrow i''$ on morfismid kategoorias $\mathcal{D}$, siis F funktooriaalsuse ja loomulike teisenduste komponeerimisreegli põhjal

$$(F(-)(j))(d'd) = F(d'd)_j = (F(d')F(d))_j = F(d')_j F(d)_j = (F(-)(j))(d')(F(-)(j))(d).$$

Samuti $(F(-)(j))(1_i) = F(1_i)_j = (1_{F(i)})_j = 1_{F(i)(j)}$ ning seega $F(-)(j)$ on funktor.

Lause 5.90. Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ kategooriad, kusjuures $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ on väiksed, ning olgu $F : \mathcal{D} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ funktor. Kui iga $C \in \mathcal{C}_0$ korral funktoiril $F(-)(C) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ on piir olemas, siis ka funktoiril F on piir olemas ning see piir on arvutatav punktiivisiliselt.

Tõestus. Tähistame $I = \mathcal{D}_0$ ja $J = \mathcal{C}_0$. Iga $j \in J$ korral olgu

$$\left(L(j), (p_i^j)_{i \in I} \right) \approx \lim F(-)(j). \quad (18)$$

Kui $c : j \rightarrow j'$ on morfism kategoorias $\mathcal{C}$, siis $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i \rightarrow i'$ korral

$$F(d)_{j'}(F(i)(c))p_i^j = (F(i')(c))F(d)_j p_i^j = (F(i')(c))p_{i'}^j.$$

Järelikult $\left(L(j), \left((F(i)(c))p_i^j \right)_{i \in I} \right) \in \text{cone}(F(-)(j'))$ ning seega leidub selline üheselt määratud morfism $L(c) : L(j) \rightarrow L(j')$, et iga $i \in I$ korral

$$p_i^{j'} L(c) = (F(i)(c))p_i^j. \quad (19)$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & L(j) & & \\
& \swarrow p_i^j & \downarrow L(c) & \searrow p_{i'}^j & \\
F(i)(j) & & L(j') & & F(i')(j) \\
\downarrow F(i)(c) & \swarrow p_i^{j'} & & \searrow p_{i'}^{j'} & \downarrow F(i')(c) \\
F(i)(j') & & & & F(i')(j') \\
& \xrightarrow{F(d)_{j'}} & & &
\end{array}$$

Veendume, et niimoodi defineeritud $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ on funktor. Kui $c : j \rightarrow j'$ ja $c' : j' \rightarrow j''$ kategoorias $\mathcal{C}$, siis iga $i \in I$ korral

$$p_i^{j''} L(c'c) = (F(i)(c'c))p_i^j = (F(i)(c'))(F(i)(c))p_i^j = (F(i)(c'))(p_i^{j'} L(c)) = p_i^{j''} L(c')L(c),$$

millest $L(c'c) = L(c')L(c)$. Võrdustest

$$p_i^j L(1_j) = (F(i)(1_j))p_i^j = 1_{F(i)(j)}p_i^j = p_i^j 1_{L(j)},$$

$i \in I$, saame aga, et $L(1_j) = 1_{L(j)}$. Seega L on funktor.

Võrdustest (19) jäeldub, et $p_i = (p_i^j)_{j \in J} : L \Rightarrow F(i)$ on loomulik teisendus.

$$\begin{array}{ccc}
L(j) & \xrightarrow{p_i^j} & F(i)(j) \\
\downarrow L(c) & & \downarrow F(i)(c) \\
L(j') & \xrightarrow{p_i^{j'}} & F(i)(j')
\end{array}$$

Näitame, et $(L, (p_i)_{i \in I})$ on funktori F piir kategoorias $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$. Selle piiri punktiviisilisust väljendab valem

$$\left(\lim_{i \in I} F(i) \right) (j) = \lim_{i \in I} (F(i)(j)),$$

mis ütleb, et funktori F piiri $\lim_{i \in I} F(i) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ väärtus kohal $j \in J$ on funktorite $F(i) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ väärtuste (kohal j) piir.

Kuna kehtib (18), siis iga morfismi $d : i \rightarrow i'$ ja iga $j \in J$ korral $(F(d)p_i)_j = F(d)_j p_i^j = p_{i'}^j$. Seega kehtib võrdus $F(d)p_i = p_{i'}$ loomulike teisenduste vahel ja $(L, (p_i)_{i \in I}) \in \text{cone}(F)$. Kui ka $(Q, (q_i)_{i \in I}) \in \text{cone}(F)$, siis $(Q(j), ((q_i)_j)_{i \in I}) \in \text{cone}(F(-)(j))$ iga $j \in J$ korral, mis annab sellise üheselt määratud morfismi $m_j : Q(j) \rightarrow L(j)$, et $p_i^j m_j = (q_i)_j$ iga $i \in I$ korral.

$$\begin{array}{ccc}
Q & & Q(j) \\
\swarrow q_i & \downarrow m & \swarrow (q_i)_j \\
F(i) & \xrightarrow{F(d)} & F(i') \\
\downarrow p_i & & \downarrow p_{i'} \\
L & & L(j) \\
\swarrow p_i & \searrow p_{i'} & \swarrow p_i^j \quad \searrow p_{i'}^{j'} \\
F(i) & \xrightarrow{F(d)} & F(i')
\end{array}$$

Siis $m = (m_j)_{j \in J} : Q \Rightarrow L$ on loomulik teisendus, sest $\mathcal{C}$ iga morfismi $c : j \rightarrow j'$ korral

$$p_i^{j'} L(c)m_j = (F(i)(c))p_i^j m_j = (F(i)(c))(q_i)_j = (q_i)_{j'} Q(c) = p_i^{j'} m_{j'} Q(c)$$

ja seega $L(c)m_j = m_{j'} Q(c)$. Teisendus m rahuldab võrdust $p_i \circ m = q_i$.

$$\begin{array}{ccc}
Q(j) & \xrightarrow{m_j} & L(j) \\
\downarrow Q(c) & & \downarrow L(c) \\
Q(j') & \xrightarrow{m_{j'}} & L(j')
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
Q(j) & \xrightarrow{(q_i)_j} & F(i)(j) \\
\downarrow Q(c) & & \downarrow F(i)(c) \\
Q(j') & \xrightarrow{(q_i)_{j'}} & F(i)(j')
\end{array}$$

Kui ka $n = (n_j)_{j \in J} : Q \Rightarrow L$ on selline loomulik teisendus, et $p_i \circ n = q_i$, siis $p_i^j n_j = (q_i)_j$ iga $j \in J$ korral. Morfismide m_j ühesuse tõttu $m_j = n_j$ iga $j \in J$ korral, s.t. $m = n$. ■

Tõestatud lausest järeldeb vahetult järgmine tulemus.

Teoreem 5.91. Kui $\mathcal{A}$ on täielik kategooria ja $\mathcal{C}$ väike kategooria, siis kategooria $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ on täielik.

Näide 5.92. Olgu $\mathcal{D} = \{1 \xrightarrow{d_1} 0 \xleftarrow{d_2} 2\}$ tagasitõmbajaid defineeriv kategooria näitest 5.53(5). Vaatleme funktoori $F : \mathcal{D} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$

$$F : \begin{array}{ccc} & 2 & \\ & \downarrow d_2 & \\ 1 & \xrightarrow{d_1} & 0 \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} & K & \\ & \downarrow \beta & \\ G & \xrightarrow{\alpha} & H \end{array}$$

Siis lause 5.90 ütleb seda, et funktoori F piiriks on kolmik (P, π, ρ) , kus funktoori $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ on objektidel $j \in J$ defineeritud kui funktoori $F(-)(j) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$

$$F(-)(j) : \begin{array}{ccc} & 2 & \\ & \downarrow d_2 & \\ 1 & \xrightarrow{d_1} & 0 \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} & K(j) & \\ & \downarrow \beta_j & \\ G(j) & \xrightarrow{\alpha_j} & H(j) \end{array}$$

piir, s.t. $P(j)$ (koos projektsoonidega p_1^j, p_2^j) on morfismide α_j, β_j tagasitõmbaja kategoorias $\mathcal{A}$. Projektsoonid $\pi : P \Rightarrow G$ ja $\rho : P \Rightarrow K$ on aga $\pi = p_1 = (p_1^j)_{j \in J}$, $\rho = p_2 = (p_2^j)_{j \in J}$. Seega

$$\begin{array}{ccc} P(j) \xrightarrow{p_2^j} K(j) & & P \xrightarrow{(p_2^j)_{j \in J}} K \\ p_1^j \downarrow & \text{on konservatiivne ruut} & \downarrow \beta \\ G(j) \xrightarrow{\alpha_j} H(j) & \text{katteoorias } \mathcal{A} & G \xrightarrow{\alpha} H \\ & \text{iga } j \in J \text{ korral} & \text{on konservatiivne ruut} \\ & & \text{katteoorias } \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}). \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} P \xrightarrow{(p_2^j)_{j \in J}} K & & \\ (p_1^j)_{j \in J} \downarrow & & \downarrow \beta \\ G \xrightarrow{\alpha} H & & \end{array}$$

Lause 5.93. Vaatleme väikest kategooriat $\mathcal{C}$ ja kovariantset Yoneda sisestust $Y : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Set})$, mis on antud järgmiselt:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}(-, C) \\ f \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(-, f) \\ C' & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}(-, C') \end{array}$$

Funktor Y säilitab piire.

Tõestus. Olgu $\mathcal{D}$ väike kategooria, $I = \mathcal{D}_0$ ja $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funktoori, mille piir on $(P, (p_i)_{i \in I})$. Tuleb tõestada, et $(\mathcal{C}(-, P), (\mathcal{C}(-, p_i))_{i \in I}) \approx \lim(YF)$. Tänu lausele 5.67 säilitab funktoori $\mathcal{C}(C, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ piire (selles lauses esineva funktoori F asemel vaatleme funktoori YF). Järelikult on iga $C \in \mathcal{C}_0$ korral

$$(\mathcal{C}(C, P), (\mathcal{C}(C, p_i))_{i \in I}) \approx \lim(\mathcal{C}(C, -) \circ F).$$

Kuna $\mathcal{C}(C, -) \circ F = \mathcal{C}(C, F(-)) = (YF)(-)(C) : \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$, siis lause 5.90 tõestuse põhjal on funktoori YF piiriks $(L, (l_i)_{i \in I})$, kus $l_i = (\mathcal{C}(C, p_i))_{C \in \mathcal{C}_0}$ ja $L : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ on funktoori, mis on defineeritud nii, et $L(C) = \mathcal{C}(C, P)$ ja kui $c : C \rightarrow C'$ kategoorias $\mathcal{C}$, siis $L(c) : \mathcal{C}(C', P) \rightarrow \mathcal{C}(C, P)$ on (vt. (19)) üheselt määratud morfism, mille korral $\mathcal{C}(C', p_i) \circ L(c) = (YF)(i)(c) \circ \mathcal{C}(C, p_i)$ ehk

$$(p_i \circ -) \circ L(c) = \mathcal{C}(c, F(i)) \circ (p_i \circ -) = (- \circ c) \circ (p_i \circ -).$$

See tähendab, et $L(c) = - \circ c : \mathcal{C}(C', P) \rightarrow \mathcal{C}(C, P)$ ja seega $L = \mathcal{C}(-, P)$. Samuti $l_i = \mathcal{C}(-, p_i)$, sest $(l_i)_C = \mathcal{C}(C, p_i) = p_i \circ - = \mathcal{C}(-, p_i)_C$ (vt. näidet 4.5). ■

Teoreem 5.94. *Olgu $\mathcal{C}$ väike kategooria. Iga funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ on esitatav mor-funktoritest ja nende vahelistest loomulikest teisendustest koosneva diagrammi kopiirina.*

Tõestus. Vaatleme liitfunktorit

$$\mathbf{el}(F) \xrightarrow{U_F} \mathcal{C} \xrightarrow{Y^{\text{op}}} \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}),$$

kus $\mathbf{el}(F)$ on funktori F elementide kategooria (vt. näidet 3.17), U_F on vastav unustav funktor ja Y^{op} on kontravariantne Yoneda sisestus. Meenutame, et $\mathbf{el}(F)$ objektid on paarid (c, C) , kus $c \in F(C)$ ja morfismid $f : (c, C) \rightarrow (c', C')$ on sellised morfismid $f : C \rightarrow C'$ kategoorias $\mathcal{C}$, mille korral $F(f)(c) = c'$. Me näitame, et F on kontravariantse funktori $Y^{\text{op}} \circ U_F : \mathbf{el}(F) \rightarrow \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$ kopiirobjekt.

Yoneda lemma (teoreem 4.11) põhjal vastab igale $\mathbf{el}(F)$ objektile (c, C) loomulik teisendus $\alpha^{(c, C)} : \mathcal{C}(C, -) \Rightarrow F$, nii et $\theta_{F, C}(\alpha^{(c, C)}) = c$ ehk $\alpha_C^{(c, C)}(1_C) = c$. Et $(\theta_{F, C})_{C \in \mathcal{C}_0} : N \Rightarrow F$ on loomulik teisendus, siis kategooria $\mathbf{el}(F)$ iga morfismi $f : (c, C) \rightarrow (c', C')$ korral on diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Nat}(\mathcal{C}(C, -), F) & \xrightarrow{\theta_{F, C}} & F(C) \\ \downarrow N(f) & & \downarrow F(f) \\ \mathbf{Nat}(\mathcal{C}(C', -), F) & \xrightarrow{\theta_{F, C'}} & F(C') \end{array}$$

kommutatiivne ning järelikult

$$\begin{aligned} \theta_{F, C'} \left(\alpha^{(c, C)} \circ \mathcal{C}(f, -) \right) &= \theta_{F, C'} \left(N(f) \left(\alpha^{(c, C)} \right) \right) = (F(f) \theta_{F, C}) \left(\alpha^{(c, C)} \right) = F(f)(c) = c' \\ &= \theta_{F, C'} \left(\alpha^{(c', C')} \right), \end{aligned}$$

millest kujutuse $\theta_{F, C'}$ üksühesuse tõttu $\alpha^{(c, C)} \circ \mathcal{C}(f, -) = \alpha^{(c', C')}$. Seega $\left(F, (\alpha^{(c, C)})_{(c, C) \in \mathbf{el}(F)_0} \right) \in \mathbf{cocone}(Y^{\text{op}} \circ U_F)$. Olgu ka

$$\left(G, (\beta^{(c, C)})_{(c, C) \in \mathbf{el}(F)_0} \right) \in \mathbf{cocone}(Y^{\text{op}} \circ U_F). \quad (20)$$

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \beta_{(c, C)} \nearrow & \uparrow \mu & \nwarrow \beta_{(c', C')} \\ \alpha_{(c, C)} \nearrow & F & \nwarrow \alpha_{(c', C')} \\ \mathcal{C}(C, -) & \xleftarrow{\mathcal{C}(f, -)} & \mathcal{C}(C', -) \end{array}$$

Selleks, et saada loomulikku teisendust $\mu : F \Rightarrow G$ oleks iga $C \in \mathcal{C}_0$ jaoks vaja defineerida kujutus $\mu_C : F(C) \rightarrow G(C)$. Kui $x \in F(C)$, siis defineerime

$$\mu_C(x) := \theta_{G, C}(\beta_{(x, C)}).$$

Kui $g : C \rightarrow D$ kategoorias $\mathcal{C}$ ja $x \in F(C)$, siis $g : (x, C) \rightarrow (F(g)(x), D)$ kategoorias $\mathbf{el}(F)$. Kuna kehtib (20), siis $\beta_{(x, C)} \circ \mathcal{C}(g, -) = \beta_{(F(g)(x), D)}$. Et diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Nat}(\mathcal{C}(C, -), G) & \xrightarrow{\theta_{G, C}} & G(C) \\ \downarrow N(g) & & \downarrow G(g) \\ \mathbf{Nat}(\mathcal{C}(D, -), G) & \xrightarrow{\theta_{G, D}} & G(D) \end{array}$$

on kommutatiivne, siis

$$\begin{aligned} G(g)(\mu_C(x)) &= G(g) \left(\theta_{G, C}(\beta_{(x, C)}) \right) = (G(g) \theta_{G, C}) (\beta_{(x, C)}) = (\theta_{G, D} N(g)) (\beta_{(x, C)}) \\ &= \theta_{G, D} (\beta_{(x, C)} \circ \mathcal{C}(g, -)) = \theta_{G, D} (\beta_{(F(g)(x), D)}) = \mu_D(F(g)(x)). \end{aligned}$$

Järelikult $\mu : F \Rightarrow G$ on loomulik teisendus.

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{\mu_C} & G(C) \\ F(g) \downarrow & & \downarrow G(g) \\ F(D) & \xrightarrow{\mu_D} & G(D) \end{array}$$

Kuna

$$\theta_{G,C}(\mu\alpha^{(c,C)}) = (\mu_C\alpha_C^{(c,C)})(1_C) = \mu_C(\alpha_C^{(c,C)}(1_C)) = \mu_C(c) = \theta_{G,C}(\beta_{(c,C)}),$$

siis kujutuse $\theta_{G,C}$ üksühesuse tõttu $\mu\alpha^{(c,C)} = \beta_{(c,C)}$. Kui ka $\nu\alpha^{(c,C)} = \beta_{(c,C)}$ iga $(c, C) \in \text{el}(F)_0$ korral, siis

$$\mu_C(c) = \theta_{G,C}(\mu\alpha^{(c,C)}) = \theta_{G,C}(\nu\alpha^{(c,C)}) = \nu_C(c),$$

millest järeldub $\mu = \nu$. ■

5.10. Ülesanded

Ülesanded 5.95. 1. Kas sinu lemmikkateoorias on olemas (ko)korrutised, (ko)võrdsustajad või tagasitõmbajad? Kas ta on (ko)täielik?

2. Olgu $\mathcal{C}$ lõplike korrutistega kategooria. Näidata, et leidub funktor $- \times - : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, mis on defineeritud võrdustega

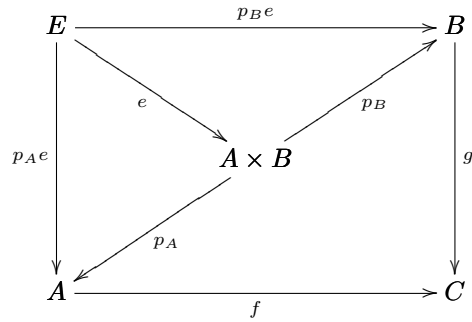
$$\begin{aligned} (- \times -)(A, B) &:= A \times B, \\ (- \times -)(f, g) &:= f \times g : A \times B \rightarrow A' \times B', \end{aligned}$$

kus $f : A \rightarrow A'$, $g : B \rightarrow B'$ kategoorias $\mathcal{C}$ ja $f \times g$ on üheselt määratud morfism, mis muudab diagrammi

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{p_A} & A \times B & \xrightarrow{p_B} & B \\ f \downarrow & & \downarrow f \times g & & \downarrow g \\ A' & \xleftarrow{p_{A'}} & A' \times B' & \xrightarrow{p_{B'}} & B' \end{array}$$

kommutatiivseks. (Funktorit kahe kategooria korrutisest kolmandasse kategooriasse nimetatakse tihti **bifunktoriks**.)

- Näidatata, et üheski mittetriviaalses rühmas, mida vaadeldakse üheobjekttilise kategooriana, ei ole binaarseid korrutisi.
- Olgu (E, e) morfismide $f, g : A \rightarrow B$ võrdsustaja. Tõestada, et e on isomorfism parajasti siis, kui $f = g$.
- Tuua näide kategooriast $\mathcal{C}$, kus on kaks morfismi $f, g : A \rightarrow B$, millel ei leidu kovõrdsustajat kategoorias $\mathcal{C}$. (Näpunäide: võib vaadelda kategooria **Set** alamkategooriaid.)
- Tõestada, et tuumapaaride projektsioonid on retraktsioonid.
- Defineerida koonuste morfismi mõiste loomulike teisenduste abil.
- Tõestada, et kui f on monomorfism ja (P, p_1, p_2) on morfismide f ja g tagasitõmbaja, siis p_2 on monomorfism.
- Tõestada otse, et konservatiivsed ruudud saab (kanooniliselt) konstrueerida korrutiste ja võrdsustajate abil. Täpsemalt, olgu $f : A \rightarrow C$ ja $g : B \rightarrow C$ kaks morfismi kategoorias $\mathcal{C}$. Tõestada, et



on konservatiivne.

10. Tõestada, et kui $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ja $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ säilitavad kõik piirid, siis ka $HG : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ säilitab kõik piirid.
11. Kategooria $\mathcal{A}$ ja fikseeritud objekti $A \in \mathcal{A}_0$ jaoks anda funktori $(A \times -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ definitsioon analoogiliselt ülesandega 2. Tõestada, et kui $\mathcal{A}$ on lõplikult täielik, siis $A \times -$ säilitab võrdsustajad.

6. Kaasfunktorid

6.1. Motiveerivad näited

Vaatleme vektorruumide (üle korpuse K) kategooriat Vec_K , kus morfismideks on lineaarkujutused. Unustav funktor $U : \text{Vec}_K \rightarrow \text{Set}$ viib iga vektorruumi V tema elementide hulgaks. Iga hulga X korral leidub vektorruum V_X , mille jaoks X on baasivektorite hulk: see koosneb kõigist X elementide formaalsetest lineaarkombinatsioonidest $k_1x_1 + \dots + k_nx_n$, $k_1, \dots, k_n \in K$, koos loomulikul viisil defineeritud tehetegega. Iga kujutuse $f : X \rightarrow Y$ saab laiendada lineaarkujutuseks $V_X \rightarrow V_Y$ nii, et tulemuseks on funktor $F : \text{Set} \rightarrow \text{Vec}_K$. See funktor on objektidel defineeritud võrdusega $F(X) = V_X$, kus X on hulk, ja morfismidel võrdusega

$$F(f)(k_1x_1 + \dots + k_nx_n) := k_1f(x_1) + \dots + k_nf(x_n).$$

Iga hulga X ja vektorruumi W korral leidub bijektiivne kujutus

$$\begin{aligned} \varphi_{X,W} : \text{Vec}_K(F(X), W) &\longrightarrow \text{Set}(X, U(W)), \\ f &\longmapsto f|_X. \end{aligned} \quad (21)$$

Selle pöördkujutus $\psi_{X,W} : \text{Set}(X, U(W)) \longrightarrow \text{Vec}_K(F(X), W)$ laiendab iga kujutuse $g : X \rightarrow U(W)$ üheselt määratud lineaarkujutuseks $\psi_{X,W}(g) =: f_g : F(X) \rightarrow W$, mis ilmutatult on antud võrdusega

$$f_g(k_1x_1 + \dots + k_nx_n) = k_1g(x_1) + \dots + k_ng(x_n) \quad (22)$$

(seega f_g viib formaalsed lineaarkombinatsioonid vektorruumis $F(X)$ tegelikeks lineaarkombinatsioonideks vektorruumis W). Osutub, et kujutused $\varphi_{X,W}$ on loomuliku teisenduse φ komponendid, kui (21) mõlemad pooli vaadelda funktoritena X ja W suhtes. Selles veendumiseks piisab, kui kontrollida loomulikkust X ja W suhtes eraldi (vt. ülesannet 6.26 (1)). Loomulikkus X suhtes tähendab, et iga kujutuse $k : X' \rightarrow X$ korral diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Vec}_K(F(X), W) & \xrightarrow{\varphi_{X,W}} & \text{Set}(X, U(W)) \\ \downarrow - \circ F(k) & & \downarrow - \circ k \\ \text{Vec}_K(F(X'), W) & \xrightarrow{\varphi_{X',W}} & \text{Set}(X', U(W)) \end{array}$$

on kommutatiivne. Tõepoolest, iga lineaarkujutuse $f : F(X) \rightarrow W$ ja iga elemendi $x \in X'$ korral

$$\begin{aligned} [(- \circ k) \circ \varphi_{X,W}](f)(x) &= (\varphi_{X,W}(f) \circ k)(x) = f|_X(k(x)) = f(k(x)) = f(F(k)(x)) = (f \circ F(k))|_{X'}(x) \\ &= [\varphi_{X',W}(f \circ F(k))](x) = [\varphi_{X',W} \circ (- \circ F(k))](f)(x). \end{aligned}$$

Sarnane arutlus annab, et φ on loomulik W suhtes. Veelgi enam, kujutus, mis saadab iga $x \in X$ samaks elemendiks x , mida vaadeldakse V_X vektorina, on morfism $\iota_X : X \rightarrow U(V_X) = (UF)(X)$ kategoorias Set . Mistahes vektorruumi W ja kujutuse $g : X \rightarrow U(W)$ korral on lineaarkujutused $f_g : V_X \rightarrow W$ üheselt määratud lineaarkujutused, mis laiendavad kujutust g , s.t. muudavad kolmnurga

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & U(V_X) \\ & \searrow g & \downarrow U(f_g) \\ & & U(W) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & V_X \\ & & \downarrow f_g \\ & & W \end{array}$$

kommutatiivseks.

On veel teisi sarnaseid näiteid. Hulkade S, T ja R korral leiduvad bijektiivsed kujutused

$$\varphi_{S,R} : \text{Set}(S \times T, R) \longrightarrow \text{Set}(S, \text{Set}(T, R)),$$

mis on antud võrdusega

$$[\varphi_{S,R}(f)(s)](t) := f(s, t)$$

iga kujutuse $f : S \times T \rightarrow R$ ja mistahes elementide $s \in S, t \in T, r \in R$ korral. Selline φ on loomulik S ja R (aga ka T) suhtes. Kui hulk T on fikseeritud ja defineerime $F, G : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ kui funktooreid $F := - \times T$ ja $G := \mathbf{Set}(T, -)$, siis bijektsioon võtab kuju

$$\varphi_{S,R} : \mathbf{Set}(F(S), R) \longrightarrow \mathbf{Set}(S, G(R)).$$

Saab näidata, et moodulite A, B jaoks üle kommutatiivse ringi R ja Abeli rühma C jaoks leidub isomorfism

$$\varphi_{A,C} : \mathbf{Ab}(A \otimes_R B, C) \longrightarrow \mathbf{Mod}_R(A, \mathbf{Ab}(B, C)).$$

6.2. Kaasfunktorid

Definitsioon 6.1. Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kategooriad. **Adjunktsioon** kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ on kolmik $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, kus $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ja $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ on funktooreid ja $\varphi = (\varphi_{A,B})_{(A,B) \in \mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_0}$ on bijektiivsete kujutuste

$$\varphi_{A,B} : \mathcal{B}(F(A), B) \rightarrow \mathcal{A}(A, G(B)) \quad (23)$$

süsteem, mis on loomulik A ja B suhtes. Kui $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on adjunktsioon, siis ütleme et F on **vasakpoolne kaasfunktor** ja G on **parempoolne kaasfunktor** ning kirjutame $F \dashv G$.

Funktor $\mathcal{B}(F(-), -)$ avaldise (23) vasakul poolel on bifunktor

$$\mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{B} \xrightarrow{F \times 1_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{B} \xrightarrow{\text{hom}} \mathbf{Set},$$

mis tegutseb järgmiselt:

$$\begin{array}{ccc} (A, B) & \longmapsto & \mathcal{B}(F(A), B) \\ \downarrow (k^{\text{op}}, h) & & \downarrow h \circ - \circ F(k) \\ (A', B') & \longmapsto & \mathcal{B}(F(A'), B') \end{array}$$

Bifunktor $\mathcal{A}(-, G(-)) : \mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Set}$ on defineeritud analoogiliselt. Seega bijektsioonide φ loomulikkus tähendab, et mistahes morfismide $k : A' \rightarrow A$ ja $h : B \rightarrow B'$ korral diagrammid

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(A), B) & \xrightarrow{\varphi_{A,B}} & \mathcal{A}(A, G(B)) \\ \downarrow - \circ F(k) & & \downarrow - \circ k \\ \mathcal{B}(F(A'), B) & \xrightarrow{\varphi_{A',B}} & \mathcal{A}(A', G(B)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(A), B) & \xrightarrow{\varphi_{A,B}} & \mathcal{A}(A, G(B)) \\ \downarrow h \circ - & & \downarrow G(h) \circ - \\ \mathcal{B}(F(A), B') & \xrightarrow{\varphi_{A,B'}} & \mathcal{A}(A, G(B')) \end{array}$$

kommuteeruvad (vt. ülesannet 6.26 (1)). See tähendab, et kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $k : A' \rightarrow A$ ja kategooria $\mathcal{B}$ mistahes morfismide $h : B \rightarrow B'$ ja $f : F(A) \rightarrow B$ korral

$$\varphi_{A',B}(fF(k)) = \varphi_{A,B}(f)k, \quad (24)$$

$$\varphi_{A,B'}(hf) = G(h)\varphi_{A,B}(f). \quad (25)$$

Definitsioon 6.2. Olgu $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ funktooreid ja $A \in \mathcal{A}_0$. **Universaalne morfism** objektist A funktooris G on objekti A G -aluste objektide kategooria $(A \downarrow G)$ algobjekt (vt. näidet 3.16).

Seega universaalne morfism objektist A funktooris G on paar (u, B) , mis koosneb objektist $B \in \mathcal{B}_0$ ja kategooria $\mathcal{A}$ morfismist $u : A \rightarrow G(B)$, nii et iga paari (g, B') , kus $B' \in \mathcal{B}_0$ ja $g : A \rightarrow G(B')$, jaoks leidub selline üheselt määratud morfism $f : B \rightarrow B'$ kategoorias $\mathcal{B}$, et $G(f)u = g$. Teiste sõnadega, iga morfism $A \rightarrow G(B')$, $B' \in \mathcal{B}$, tegurdub üheselt läbi universaalse morfismi u .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & G(B) \\ & \searrow g & \downarrow G(f) \\ & & G(B') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & & \\ \downarrow f & & \\ B' & & \end{array}$$

Duaalselt saab defineerida universaalsed morfismid funktooreid $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ objekti $B \in \mathcal{B}_0$. Kuna alg- ja lõppobjektid on ühesed isomorfismi täpsuseni, siis ka universaalsed morfismid on ühesed isomorfismi täpsuseni.

Teoreem 6.3. Adjunksioon $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ määrab ära

1. loomuliku teisenduse $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$, nii et iga objekti $A \in \mathcal{A}_0$ korral paar $(\eta_A, F(A))$ on universaalne morfism objektist A funktooris G ja iga $f : F(A) \rightarrow B$ korral

$$\varphi_{A,B}(f) = G(f)\eta_A : A \rightarrow G(B); \quad (26)$$

2. loomuliku teisenduse $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$, nii et iga objekti $B \in \mathcal{B}_0$ korral paar $(G(B), \varepsilon_B)$ on universaalne morfism funktooriga F objektist B ja iga $g : A \rightarrow G(B)$ korral

$$\varphi_{A,B}^{-1}(g) = \varepsilon_B F(g) : F(A) \rightarrow B. \quad (27)$$

Veelgi enam, kompositsioonid $(G*\varepsilon) \circ (\eta*G)$ ja $(\varepsilon*F) \circ (F*\eta)$ on samasusteisendused vastavalt funktooriga G ja F .

$$G \xrightarrow{\eta*G} GFG \xrightarrow{G*\varepsilon} G, \quad F \xrightarrow{F*\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon*F} F. \quad (28)$$

Loomuliku teisendust η nimetatakse **adjunksiooni ühikuks** ja loomuliku teisendust ε **koühikuks**. Märgime, et (3) ja (4) põhjal teiseneb tingimus (28) niinimetatud **kolmnurksamasusteks**

$$G(\varepsilon_B)\eta_{G(B)} = 1_{G(B)}, \quad \varepsilon_{F(A)}F(\eta_A) = 1_{F(A)}, \quad (29)$$

$A \in \mathcal{A}_0, B \in \mathcal{B}_0$, s.t. kolmnurkade

$$\begin{array}{ccc} G(B) & \xrightarrow{\eta_{G(B)}} & (GFG)(B) \\ & \searrow 1_{G(B)} & \downarrow G(\varepsilon_B) \\ & & G(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(\eta_A)} & (FGF)(A) \\ & \searrow 1_{F(A)} & \downarrow \varepsilon_{F(A)} \\ & & F(A) \end{array} \quad (30)$$

kommutatiivsuseks.

Tõestus. 1. Iga $A \in \mathcal{A}_0$ korral võtame avaldises (23) $B := F(A)$ ja defineerime morfismi $\eta_A : A \rightarrow (GF)(A)$ võrdusega

$$\eta_A := \varphi_{A,F(A)}(1_{F(A)}). \quad (31)$$

Võrdusest (25) järeldub siis, et iga morfismi $f : F(A) \rightarrow B$ korral

$$\varphi_{A,B}(f) = \varphi_{A,B}(f1_{F(A)}) = G(f)\varphi_{A,F(A)}(1_{F(A)}) = G(f)\eta_A.$$

Et tõestada $(\eta_A, F(A))$ universaalsus oletame, et $g : A \rightarrow G(B)$ on morfism kategoorias $\mathcal{A}$. Siis $\varphi_{A,B}^{-1}(g) : F(A) \rightarrow B$ kategoorias $\mathcal{B}$ ja võrdust (26) kasutades saame, et

$$G(\varphi_{A,B}^{-1}(g))\eta_A = \varphi_{A,B}(\varphi_{A,B}^{-1}(g)) = g.$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & (GF)(A) \\ & \searrow g & \downarrow G(\varphi_{A,B}^{-1}(g)) \\ & & G(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(A) & & \\ & \downarrow \varphi_{A,B}^{-1}(g) & \\ & B & \end{array}$$

Kui ka $G(h)\eta_A = g$ mingi morfismi $h : F(A) \rightarrow B$ korral, siis võrdusest $g = \varphi_{A,B}(h)$ järeldub $\varphi_{A,B}^{-1}(g) = h$. Seega η_A on universaalne morfism objektist A funktooris G .

Tõestamiseks, et $\eta = (\eta_A)_{A \in \mathcal{A}_0} : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$ on loomulik teisendus, vaatleme kategooria $\mathcal{A}$ morfismi $k : A' \rightarrow A$ korral diagrammi

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & (GF)(A') \\ \downarrow k & & \downarrow (GF)(k) \\ A & \xrightarrow{\eta_A} & (GF)(A) \end{array}$$

Selle kommutatiivsuse järel on võrduste ahelast

$$\begin{aligned}(GF)(k)\eta_{A'} &= (GF)(k)\varphi_{A',F(A')}(1_{F(A')}) = \varphi_{A',F(A)}(F(k)1_{F(A')}) = \varphi_{A',F(A)}(1_{F(A)}F(k)) \\ &= \varphi_{A,F(A)}(1_{F(A)})k = \eta_A k,\end{aligned}$$

kus me oleme kasutanud võrdusi (31), (25) ja (24). Neid arvutusi võib illustreerida järgneva kommutatiivse diagrammi abil:

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{B}(F(A'), F(A')) & \xrightarrow{F(k) \circ -} & \mathcal{B}(F(A'), F(A)) & \xleftarrow{- \circ F(k)} & \mathcal{B}(F(A), F(A)) \\ \downarrow \varphi_{A',F(A')} & & \downarrow \varphi_{A',F(A)} & & \downarrow \varphi_{A,F(A)} \\ \mathcal{A}(A', (GF)(A')) & \xrightarrow{(GF)(k) \circ -} & \mathcal{A}(A', (GF)(A)) & \xleftarrow{- \circ k} & \mathcal{A}(A, (GF)(A))\end{array}$$

2. Iga $B \in \mathcal{B}_0$ korral võtame avaldises (23) $A := G(B)$ ja defineerime morfismi $\varepsilon_B : (FG)(B) \rightarrow B$ võrdusega

$$\varepsilon_B := \varphi_{G(B),B}^{-1}(1_{G(B)}). \quad (32)$$

See osutub universaalseks morfismiks funktooriga F objekti B ja saab näidata, et $\varphi_{A,B}^{-1}(g) = \varepsilon_B F(g)$ iga $g : A \rightarrow G(B)$ korral.

Lõpuks, kolmnurgad (30) kommuteeruvad, sest võrduste (32), (26), (31) ja (27) tõttu

$$\begin{aligned}1_{G(B)} &= \varphi_{G(B),B}(\varepsilon_B) = G(\varepsilon_B)\eta_{G(B)}, \\ 1_{F(A)} &= \varphi_{A,F(A)}^{-1}(\eta_A) = \varepsilon_{F(A)}F(\eta_A).\end{aligned}$$

■

Osutub, et funktoori (vasakpoolne või parempoolne) kaasfunktor on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud.

Lause 6.4. Kui $F \dashv G$ ja $F' \dashv G$, siis $F \cong F'$.

Tõestus. Olgu $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$ ja $\eta' : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF'$ vaadeldavate adjunktsioonide ühikud. Kuna iga $A \in \mathcal{A}_0$ korral on $(\eta_A, F(A))$ ja $(\eta'_A, F'(A))$ universaalsed morfismid objektist A funktooris G , siis on nad mõlemad kategooria $\mathcal{A} \downarrow G$ algobjektid ja seega isomorfsed selles kategoorias. See tähendab, et leiduvad sellised üksteise pöördmorfismid $g_A : F(A) \rightarrow F'(A)$ ja $h_A : F'(A) \rightarrow F(A)$, et

$$G(g_A)\eta_A = \eta'_A \text{ ja } G(h_A)\eta'_A = \eta_A.$$

Tõestamiseks, et $g = (g_A)_{A \in \mathcal{A}_0} : F \Rightarrow F'$ on loomulik teisendus, peame veenduma, et diagramm

$$\begin{array}{ccc}F(A) & \xrightarrow{g_A} & F'(A) \\ F(k) \downarrow & & \downarrow F'(k) \\ F(A') & \xrightarrow{g_{A'}} & F'(A')\end{array}$$

on kommutatiivne kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $k : A \rightarrow A'$ korral. Tänu η_A universaalsusele leidub üheselt määratud morfism $b : F(A) \rightarrow F'(A')$ nii, et $G(b)\eta_A = \eta'_{A'}k$.

$$\begin{array}{ccc}A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) \\ k \downarrow & & \downarrow G(b) \\ A' & \xrightarrow{\eta'_{A'}} & G(F'(A'))\end{array} \quad \begin{array}{ccc}F(A) & & \\ \downarrow b & & \\ F'(A') & & \end{array}$$

Kasutades η ja η' loomulikkust diagrammide

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta'_A} & (GF')(A) \\ \downarrow k & & \downarrow (GF')(k) \\ A' & \xrightarrow{\eta'_{A'}} & (GF')(A') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & (GF)(A) \\ \downarrow k & & \downarrow (GF)(k) \\ A' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & (GF)(A') \end{array}$$

kommutatiivsuse näol saame aga, et

$$\begin{aligned} G(F'(k)g_A)\eta_A &= (GF')(k)G(g_A)\eta_A = (GF')(k)\eta'_A = \eta'_{A'}k, \\ G(g_{A'}F(k))\eta_A &= G(g_{A'})(GF)(k)\eta_A = G(g_{A'})\eta_{A'}k = \eta'_{A'}k, \end{aligned}$$

millest b ühesuse tõttu järeldubki, et $F'(k)g_A = b = g_{A'}F(k)$. ■

Teoreem 6.5. Iga adjunksioon $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on täielikult ära määratud järgmise loetelu iga punkti poolt.

1. Funktorid F, G ja selline loomulik teisendus $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$, et iga $\eta_A : A \rightarrow (GF)(A)$ on universaalne morfism objektist A funktoorse G . Siis φ on defineeritud võrdusega (26).
2. Funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ja iga $A \in \mathcal{A}_0$ korral objekt $F_0(A) \in \mathcal{B}_0$ ning universaalne morfism $\eta_A : A \rightarrow G(F_0(A))$ objektist A funktoorse G . Siis funktor F on objektidel antud kujutusega F_0 ja morfismidel $k : A \rightarrow A'$ on defineeritud võrdusega $G(F(k))\eta_A = \eta_{A'}k$.
3. Funktorid F, G ja selline loomulik teisendus $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$, et iga $\varepsilon_B : (FG)(B) \rightarrow B$ on universaalne morfism funktoorse F objekti B . Siis φ^{-1} on defineeritud võrdusega (27).
4. Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ja iga $B \in \mathcal{B}_0$ korral objekt $G_0(B) \in \mathcal{A}_0$ ning universaalne morfism $\varepsilon_B : F(G_0(B)) \rightarrow B$ funktoorse F objekti B .
5. Funktorid F, G ja sellised loomulikud teisendused $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$ ja $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$, et mõlemad kompositsioonid (28) on samasusteisendused. Siis φ on defineeritud võrdusega (26) ja φ^{-1} võrdusega (27).

Tõestus. 1. Olgu $A \in \mathcal{A}_0$ ja $B \in \mathcal{B}_0$. Morfismi $\eta_A : A \rightarrow (GF)(A)$ universaalsus tähendab, et iga morismi $g : A \rightarrow G(B)$ jaoks leidub täpselt üks morfism $f : F(A) \rightarrow B$, mis muudab kolmnurga

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & (GF)(A) \\ & \searrow g & \downarrow G(f) \\ & & G(B) \end{array}$$

kommutatiivseks. See tähendab täpselt seda, et võrdus

$$\psi_{A,B}(f) := G(f)\eta_A$$

defineerib bijektsiooni $\psi_{A,B} : \mathcal{B}(F(A), B) \rightarrow \mathcal{A}(A, G(B))$.

Kategooria $\mathcal{A}$ iga morismi $k : A' \rightarrow A$ korral on diagramm

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & (GF)(A') \\ \downarrow k & & \downarrow (GF)(k) \\ A & \xrightarrow{\eta_A} & (GF)(A) \end{array}$$

kommutatiivne ning järelikult iga $\mathcal{B}$ morismi $f : F(A) \rightarrow B$ korral

$$\psi_{A,B}(f)k = G(f)\eta_Ak = G(f)(GF)(k)\eta_{A'} = G(fF(k))\eta_{A'} = \psi_{A',B}(fF(k)).$$

Seega ψ on loomulik A suhtes. Mistahes morfismide $h : B \rightarrow B'$ ja $f : F(A) \rightarrow B$ korral kategoorias $\mathcal{B}$

$$G(h)\psi_{A,B}(f) = G(h)G(f)\eta_A = G(hf)\eta_A = \psi_{A,B'}(hf)$$

ja seega ψ on loomulik ka B suhtes.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(A), B) & \xrightarrow{\psi_{A,B}} & \mathcal{A}(A, G(B)) \\ \downarrow - \circ F(k) & & \downarrow - \circ k \\ \mathcal{B}(F(A'), B) & \xrightarrow{\psi_{A',B}} & \mathcal{A}(A', G(B)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(A), B) & \xrightarrow{\psi_{A,B}} & \mathcal{A}(A, G(B)) \\ \downarrow h \circ - & & \downarrow G(h) \circ - \\ \mathcal{B}(F(A), B') & \xrightarrow{\psi_{A,B'}} & \mathcal{A}(A, G(B')) \end{array}$$

Niisiis oleme saanud adjunktsiooni $\langle F, G, \psi \rangle$. Juhul kui η oli ühik, mis oli saadud adjunktsioonist $\langle F, G, \varphi \rangle$, siis $\psi = \varphi$, sest võrduse (26) tõttu $\psi_{A,B}(f) = G(f)\eta_A = \varphi_{A,B}(f)$ iga morfismi $f : F(A) \rightarrow B$ korral.

2. Näitame, et punkti 2 andmeid saab täiendada punkti 1 andmeteks ja seega nad määravad ära adjunktsiooni. Punktis 2 on meil antud ainult universaalne morfism $(\eta_A, F_0(A))$ iga $A \in \mathcal{A}_0$ korral. Näitame, et on täpselt üks võimalus muuta F_0 funktoriks $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, mille korral $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$ oleks loomulik teisendus. Kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $k : A \rightarrow A'$ korral järeldub η_A universaalsusest, et leidub ühene morfism $F_0(A) \rightarrow F_0(A')$, mida tähistame $F(k)$, nii et diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F_0(A)) \\ k \downarrow & & \downarrow G(F(k)) \\ A' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & G(F_0(A')) \end{array} \quad \begin{array}{c} F_0(A) \\ \downarrow F(k) \\ F_0(A') \end{array}$$

kommuteerub. Kui $l : A' \rightarrow A''$ on ka $\mathcal{A}$ morfism siis vaatleme kommutatiivset diagrammi

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F_0(A)) \\ k \downarrow & & \downarrow G(F(k)) \\ A' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & G(F_0(A')) \\ l \downarrow & & \downarrow G(F(l)) \\ A'' & \xrightarrow{\eta_{A''}} & G(F_0(A'')) \end{array} \quad \begin{array}{c} F_0(A) \\ \downarrow F(k) \\ F_0(A') \\ \downarrow F(l) \\ F_0(A'') \end{array} .$$

Kuna $F(lk) : F_0(A) \rightarrow F_0(A'')$ on ühene morfism, mille korral $\eta_{A''}lk = F(lk)\eta_A$, aga teisest küljest ka

$$\eta_{A''}lk = G(F(l))\eta_{A'}k = G(F(l))G(F(k))\eta_A = G(F(l)F(k))\eta_A,$$

siis peab kehtima võrdus $F(l)F(k) = F(lk)$. Ilmselt $F(1_A) = 1_{F_0(A)}$ ning seega F on funktor. Tänu F definitsioonile on $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$ loomulik teisendus.

Väide 3 on duaalne väitega 1 ja väide 4 väitega 2.

5. Iga $A \in \mathcal{A}_0$ ja $B \in \mathcal{B}_0$ korral defineerime kaks kujutust $\mathcal{B}(F(A), B) \xrightleftharpoons[\theta_{A,B}]{\varphi_{A,B}} \mathcal{A}(A, G(B))$ võrdustega

$$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(f) &:= G(f)\eta_A, \\ \theta_{A,B}(g) &:= \varepsilon_B F(g), \end{aligned}$$

$f : F(A) \rightarrow B, g : A \rightarrow G(B)$. Kasutades G funktooriaalsust, η loomulikkust ja esimest kolmnurksamasust (29) saame

$$\begin{aligned} (\varphi_{A,B}\theta_{A,B})(g) &= \varphi_{A,B}(\varepsilon_B F(g)) = G(\varepsilon_B F(g))\eta_A = G(\varepsilon_B)(GF)(g)\eta_A \\ &= G(\varepsilon_B)\eta_{G(B)}g = 1_{G(B)}g = g. \end{aligned}$$

Seega $\varphi_{A,B}\theta_{A,B} = 1_{\mathcal{A}(A,G(B))}$. Duaalselt $\theta_{A,B}\varphi_{A,B} = 1_{\mathcal{B}(F(A),B)}$ ning seega on $\varphi_{A,B}$ bijektsioon. Et veenduda φ loomulikkuses, see tähendab, võrduste (24) ja (25) kehtimises suvaliste morfismide $k : A' \rightarrow A$, $h : B \rightarrow B'$ ja $f : F(A) \rightarrow B$ korral, paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\varphi_{A',B}(fF(k)) &= G(fF(k))\eta_{A'} = G(f)(GF)(k)\eta_{A'} = G(f)\eta_A k = \varphi_{A,B}(f)k, \\ \varphi_{A,B'}(hf) &= G(hf)\eta_A = G(h)G(f)\eta_A = G(h)\varphi_{A,B}(f).\end{aligned}$$

Järelikult oleme saanud adjunktsiooni (ja kui alustasime mingi adjunktsiooniga, siis on see täpselt sama, millest alustasime). ■

Teoreem 6.5 on väga kasulik. Näiteks osa 2 lubab konstrueerida adjunktsiooni, kui leidub universaalne morfism $\mathcal{A}$ igast objektist A funktsorisse $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. Vaatleme näiteks kategooriat $\mathcal{B}$ ja **diagonaalfunktorit**

$$\Delta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{B}, \quad B \mapsto (B, B), \quad f \mapsto (f, f).$$

Kui kategoorias $\mathcal{B}$ on olemas lõplikud kokorrutised, siis iga paari $(B, B') \in (\mathcal{B} \times \mathcal{B})_0$ jaoks leidub universaalne morfism $(u_B, u_{B'}) : (B, B') \rightarrow \Delta(B \amalg B')$, nimelt morfsimideks $u_B : B \rightarrow B \amalg B'$ ja $u_{B'} : B' \rightarrow B \amalg B'$ võib võtta kokorrutise sisestused. Teoreemi 6.5 põhjal järeldame, et kujutus $(B, B') \mapsto B \amalg B'$ defineerib funktori $- \amalg - : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ objektidel ja saadud funktor on diagonaalfunktori $\Delta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ vasakpoolne kaasfunktor, $- \amalg - \dashv \Delta$:

$$\mathcal{B}(B \amalg B', C) \cong (\mathcal{B} \times \mathcal{B})((B, B'), \Delta(C)) = \mathcal{B}(B, C) \times \mathcal{B}(B', C).$$

Analoogiliselt, kui kategoorias $\mathcal{A}$ on olemas lõplikud korrutised, siis defineerivad nad funktori $- \times - : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ nii, et $\Delta \dashv - \times -$:

$$(\mathcal{A} \times \mathcal{A})(\Delta(C), (A, A')) \cong \mathcal{A}(C, A \times A').$$

Vaatleme näitena veel kahte järjestatud hulka A ja B kui kategooriaid (vt. näidet 1.5(2)). Järjestust säilitavad kujutused A ja B vahel on kovariantsed funktorid ja järjestust pööravad kujutused on kontravariantsed funktorid. Vaatleme kahte järjestust pööravat kujutust $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ kui kovariantseid funktooreid

$$A \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{matrix} B^{\text{op}}$$

(vt. lauset 3.8). Siis $f \dashv g$, kui

$$a \leq (gf)(a) \text{ kategoorias } A \text{ ja } (fg)(b) \leq b \text{ kategoorias } B^{\text{op}} \text{ (ehk } b \leq (fg)(b) \text{ kategoorias } B) \quad (33)$$

iga $a \in A$ ja $b \in B$ korral. See järeldub teoreemist 6.5 (5): loomulikkuse tingimused ja kolmnurksamasused on automaatselt rahuldatud, sest järjestatud hulgas on kahe objekti vahel ülimalt üks morfism. Seega tingimus (33) on samaväärne bijektsiooni $B^{\text{op}}(f(a), b) \rightarrow A(a, g(b))$ leidumisega, mis taandub sellele, et

$$b \leq f(a) \text{ kategoorias } B \iff a \leq g(b) \text{ kategoorias } A$$

iga $a \in A$, $b \in B$ korral. Sellist olukorda järjestatud hulkade vahel nimetatakse **Galois' vastavuseks**.

6.3. Kaasfunktorite näited

Järgmine tabel loetleb mõned kaasfunktorite näited.

	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$	$G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$	adjunktsiooni ühik
1	Set	Vec_K	$X \mapsto V_X$, vektorruum baasiga X	unustav funktor U	$\iota_X : X \rightarrow U(V_X)$, tekitajate sisestus (vt. 6.1)
2	Set	Gr	$X \mapsto F(X)$, vaba rühm tekitajate hulgaga X	unustav funktor U	$X \rightarrow U(F(X))$, tekitajate sisestus
3	Gr	Ab	$A \mapsto A/A'$, abelistamise funktor (vt. näidet 3.3 (6))	sisestusfunktor	$A \rightarrow A/A'$, projektsioon faktorile
4	Dom_m	Field	$D \mapsto Q(D)$, jagatiste korpus	unustav funktor U	$\iota_D : D \rightarrow U(Q(D))$, D sisestus: $a \mapsto \frac{a}{1}$
5	Met	Cmet	meetrilise ruumi täielikustamine	sisestusfunktor	$X \rightarrow \bar{X}$, X sisestus tema täiendisse
6	Set	Top	$X \mapsto (X, \tau)$, τ diskreetne (diskreet- se ruumi funktor)	unustav funktor U	$1_X : X \rightarrow X$
7	Top	Haus	$(X, \tau) \mapsto (X, \tau)/\bar{\Delta}_X$, faktor diagonaali su- lundi järgi	sisestusfunktor	$(X, \tau) \rightarrow (X, \tau)/\bar{\Delta}_X$, projektsioon faktorile
8	Set	Set	$- \times T$, T on fikseeritud hulk	$\text{Set}(T, -) = (-)^T$, T on fikseeritud hulk	$S \rightarrow \text{Set}(T, S \times T)$, $s \mapsto f_s$, kus $f_s(t) = (s, t)$
9	Mod_R	Ab	$- \otimes_R B$, B on fikseeritud R - moodul	$\text{Mod}_R(B, -)$, B on fikseeritud R -moodul	$A \rightarrow \text{Mod}_R(B, A \otimes B)$, $a \mapsto f_a$, kus $f_a(b) = a \otimes b$
10	$\mathcal{B}^2$	$\mathcal{B}$	$\coprod : (B, B') \mapsto B \coprod B'$, kokorutis	$\Delta : B \mapsto (B, B)$, diagonaalfunktor	sisestuste paar $u_B : B \rightarrow B \coprod B'$, $u_{B'} : B' \rightarrow B \coprod B'$
11	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}^2$	$\Delta : A \mapsto (A, A)$, diagonaalfunktor	$\prod : (A, A') \mapsto A \times A'$, korutisfunktor	$\delta_A : A \rightarrow A \times A$

Tabelis on ära toodud ainult adjunktsiooni ühikud. Sarnased kirjeldused on olemas kõühikute jaoks. Näiteks vektorruumis V_X baasiga X , kui $\iota_X(x) = \bar{x} \in V_X$ iga $x \in X$ korral (et eristada V_X vektoreid hulga X elementidest), siis V_X elemendid on lineaarkombinatsioonid $k_1\bar{x}_1 + \dots + k_n\bar{x}_n$, $k_i \in K$, $x_i \in X$. Siis iga vektorruumi A korral on kõühik $\varepsilon_A : V_{U(A)} \rightarrow A$ defineeritud võrdusega $\varepsilon_A = \varphi_{U(A), A}^{-1}(1_{U(A)})$, kus $\varphi_{U(A), A}^{-1} = \psi_{U(A), A}$ on antud võrdusega (22). Seega $\varepsilon_A = \psi_{U(A), A}(1_{U(A)}) = f_{1_{U(A)}}$ (vt. (32) ja (6.1)) ja

$$\varepsilon_A(k_1\bar{a}_1 + \dots + k_n\bar{a}_n) = k_1 1_{U(A)}(a_1) + \dots + k_n 1_{U(A)}(a_n) = k_1 a_1 + \dots + k_n a_n.$$

Adjunktsioonis 4 on Dom_m kõigi integriteetkondade kategooria, kus morfismideks on integriteetkondade monomorfismid (märgime, et iga korpuste homomorfism on kindlasti monomorfism). Iga integriteetkonna D korral annab tuntud konstruktsioon D jagatiste korpuse $Q(D)$ koos monomorfismiga $\iota_D : D \rightarrow Q(D)$, $a \mapsto \frac{a}{1}$. Kui K on mistahes korpus ja $g : D \rightarrow U(K)$ on monomorfism, siis leidub üheselt määratud homomorfism $f : Q(D) \rightarrow K$, nii et $U(f)\iota_D = g$. Seega ι_D on universaalne morfirm objektist D funktorisse U . Samas suuremas kategoorias Dom , kus morfismid on kõik integriteetkondade homomorfismid, ei leidu universaalset homomorfismi (näiteks) objektist $\mathbb{Z}$ unustavas funktorisse U . See järeldub faktist, et iga algarvu p jaoks leidub sürjektiivne homomorfism $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$.

Adjunktsioonis 5 on Met kõigi meetriliste ruumide kategooria, kus morfismideks on kaugust säilitavad kujutused (need peavad kindlasti olema injektiivsed). Kategooria Cmet on kategooria Met täielik alamkategooria, kus objektid on täielikud meetrilised ruumid. Meetriliste ruumide täielikustamisprotsess indutseerib funktori $\text{Met} \rightarrow \text{Cmet}$, mis on vasakpoolne kaasfunktor sisestusfunktorile $\text{Cmet} \rightarrow \text{Met}$. Harilik meetrilise ruumi sisestus $X \rightarrow \bar{X}$ tema täiendisse on selle adjunktsiooni ühik.

Adjunktsioonis 6 viib unustava funktori $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$ vasakpoolne kaasfunktor iga hulga X topoloogiliseks ruumiks (X, τ) , kus τ on diskreetne topoloogia hulga X .

Adjunktsioonis 7 on Haus kategooria Top täielik alamkategooria, mis koosneb kõigist Hausdorffi ruumidest. Topoloogiline ruum (X, τ) on Hausdorffi ruum parajasti siis, kui tema diagonaal $\Delta_X \subseteq X \times X$

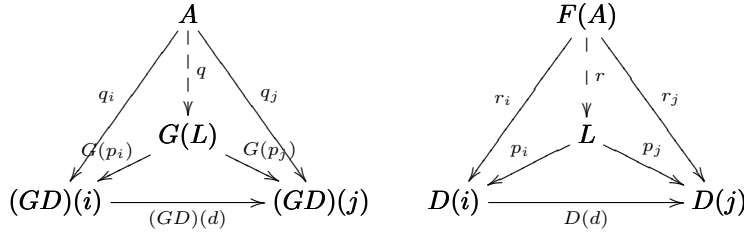
on kinnine. Sisestusfunktoril $\mathbf{Haus} \rightarrow \mathbf{Top}$ on vasakpoolne kaasfunktor $F : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Haus}$, kus $F(X, \tau) = (X, \tau)/\overline{\Delta_X}$ on topoloogilise ruumi (X, τ) faktor tema diagonaali sulundi $\overline{\Delta_X} \subseteq X \times X$ järgi, mis tõepoolest on ekvivalentsiseos.

6.4. Kaasfunktoriteoreem

Lause 6.6. Kui funktoril $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ leidub vasakpoolne kaasfunktor, siis G säilitab kõiki piire, mis kategoorias $\mathcal{B}$ olemas on.

Tõestus. Olgu $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ adjunktsioon. Vaatleme kategooriat $\mathcal{D}$ ja kirjutame $I = \mathcal{D}_0$. Oletame, et $(L, (p_i)_{i \in I})$ on funktori $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ piir. Peame tõestama, et $(G(L), G(p_i)_{i \in I})$ on funktori GD piir. Selleks piisab tõestada universaalomadus.

Vaatleme koonust $(A, (q_i)_{i \in I})$ funktoril GD .



Iga $i \in I$ korral $r_i := \varphi_{A, D(i)}^{-1}(q_i) : F(A) \rightarrow D(i)$ on morfism kategoorias $\mathcal{B}$. Siis kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i \rightarrow j$ korral järeldub ruudu

$$\begin{array}{ccc} r_i \in \mathcal{B}(F(A), D(i)) & \xleftarrow{\varphi_{A, D(i)}^{-1}} & \mathcal{A}(A, (GD)(i)) \ni q_i \\ \downarrow D(d) \circ - & & \downarrow (GD)(d) \circ - \\ \mathcal{B}(F(A), D(j)) & \xleftarrow{\varphi_{A, D(j)}^{-1}} & \mathcal{A}(A, (GD)(j)) \end{array}$$

kommutatiivsusest see, et

$$r_j = \varphi_{A, D(j)}^{-1}(q_j) = \varphi_{A, D(j)}^{-1}((GD)(d)q_i) = D(d)\varphi_{A, D(i)}^{-1}(q_i) = D(d)r_i,$$

ning seega $(F(A), (r_i)_{i \in I})$ on koonus funktoril D . Järelikult leidub selline üheselt määratud morfism $r : F(A) \rightarrow L$, et $p_i r = r_i$ iga $i \in I$ korral. Tähistades $q := \varphi_{A, L}(r) : A \rightarrow G(L)$ ja kasutades ruudu

$$\begin{array}{ccc} r \in \mathcal{B}(F(A), L) & \xrightarrow{\varphi_{A, L}} & \mathcal{A}(A, G(L)) \ni q \\ \downarrow p_i \circ - & & \downarrow G(p_i) \circ - \\ \mathcal{B}(F(A), D(i)) & \xrightarrow{\varphi_{A, D(i)}} & \mathcal{A}(A, G(D(i))) \end{array}$$

kommutatiivsust saame, et

$$G(p_i)q = G(p_i)\varphi_{A, L}(r) = \varphi_{A, D(i)}(p_i r) = \varphi_{A, D(i)}(r_i) = q_i.$$

Kui ka $q' : A \rightarrow G(L)$ on selline, et $G(p_i)q' = q_i$ iga $i \in I$ korral, siis kasutades veelkord eelneva ruudu kommutatiivsust saame

$$\varphi_{A, D(i)}(p_i \varphi_{A, L}^{-1}(q')) = G(p_i)q' = q_i = \varphi_{A, D(i)}(r_i),$$

millest kujutuse $\varphi_{A, D(i)}$ injektiivsuse tõttu järeldub, et $p_i \varphi_{A, L}^{-1}(q') = r_i$ iga $i \in I$ korral. Tänu r ühesusele saame $\varphi_{A, L}^{-1}(q') = r$, mis tähendab, et $q' = \varphi_{A, L}(r) = q$. ■

Lause 6.6 duaalne lause ütleb, et funktor, millel leidub parempoolne kaasfunktor, säilitab kõiki kopiire. Seega ülaltoodud näidete tabeli neljanda veeru funktorid F säilitavad kõiki kopiire.

Teoreem 6.7. Olgu $\mathcal{C}$ täielik kategooria. Siis kategoorias $\mathcal{C}$ leidub algobjekt parajasti siis, kui ta rahuldab järgmist tingimust.

Lahendihulga tingimus. Leidub selline hulk $S \subseteq \mathcal{C}_0$, et iga $C \in \mathcal{C}_0$ korral leidub morfism $A \rightarrow C$, kus $A \in S$.

Igal väiksel kategoorial $\mathcal{C}$ on olemas lahendihulk $S = \mathcal{C}_0$.

Tõestus. Tarvilikkus. Kui $\mathbf{0}$ on $\mathcal{C}$ algobjekt, siis võime võtta $S = \{\mathbf{0}\}$.

Piisavus. Olgu $S = \{A_i \mid i \in I\}$ lahendihulk $\mathcal{C}$ jaoks. Olgu $(P, (p_i)_{i \in I})$ objektide A_i , $i \in I$, korrutis ja (E, e) objekti P endomorfismide hulga hulgivõrdsustaja.

$$\begin{array}{ccccc}
 A_j & \xleftarrow{p_j} & P & \xrightleftharpoons[eklp_j]{1_P} & P & \xrightarrow{p_i} & A_i \\
 \downarrow l & & \uparrow e & & & & \downarrow f \\
 K & \xrightarrow{k} & E & \xrightarrow[g]{h} & C
 \end{array}$$

Väidame, et E on kategooria $\mathcal{C}$ algobjekt. Kui $C \in \mathcal{C}_0$, siis leidub morfism $f : A_i \rightarrow C$ mingi $i \in I$ korral. Seega leidub vähemalt üks morfism $fp_i e : E \rightarrow C$ objektist E objekti C . Oletame, et leiduvad morfismid $g, h : E \rightarrow C$ ja vaatleme nende võrdsustajat (K, k) . Lahendihulga tingimuse põhjal leidub morfism $l : A_j \rightarrow K$ mingi $j \in J$ korral. Seega nii 1_P kui $eklp_j$ on P endomorfismid, millest järeldub $eklp_j e = 1_P e = e1_E$. Kuna e on monomorfism lause 5.26 üldistuse põhjal, siis saame $klp_j e = 1_E$. Seega k on retraktsioon ning võrduusest $gk = hk$ järeldub võrdus $g = h$. ■

Lemma 6.8. Kui $\mathcal{B}$ on täielik kategooria ja funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ säilitab korrutisi (võrdsustajaid), siis iga $A \in \mathcal{A}_0$ korral on objekti A G -aluste objektide kategoorias $(A \downarrow G)$ olemas korrutised (võrdsustajad).

Tõestus. 1. Näitame, et kategoorias $(A \downarrow G)$ on olemas korrutised. Olgu I hulk ja $(f_i : A \rightarrow G(B_i))_{i \in I}$ kategooria $(A \downarrow G)$ objektide süsteem. Olgu $(P, (p_i)_{i \in I})$ objektide B_i , $i \in I$, korrutis kategoorias $\mathcal{B}$. Kuna G säilitab korrutised, siis $(G(P), G(p_i)_{i \in I})$ on objektide $G(B_i)$, $i \in I$, korrutis kategoorias $\mathcal{A}$.

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 & \downarrow f & \searrow f_i \\
 q \swarrow & G(P) & \xrightarrow{G(p_i)} G(B_i) \\
 & \downarrow G(m) & \nearrow G(q_i) \\
 & G(Q) &
 \end{array}$$

Seega leidub ühene morfism $f : A \rightarrow G(P)$ nii, et $G(p_i)f = f_i$ iga $i \in I$ korral. See tähendab, et $p_i : (f, P) \rightarrow (f_i, B_i)$ kategoorias $(A \downarrow G)$. Näitame, et $((f, P), (p_i)_{i \in I})$ on objektide (f_i, B_i) , $i \in I$, korrutis kategoorias $(A \downarrow G)$. Selleks oletame, et $q_i : (q, Q) \rightarrow (f_i, B_i)$, $i \in I$, on morfismide süsteem kategoorias $(A \downarrow G)$, seega $q_i : Q \rightarrow B_i$ ja $G(q_i)q = f_i$ iga $i \in I$ korral. Kuna P on objektide B_i , $i \in I$, korrutis, siis leidub ühene morfism $m : Q \rightarrow P$ nii, et $p_i m = q_i$. Seega

$$G(p_i)G(m)q = G(q_i)q = f_i = G(p_i)f$$

iga $i \in I$ korral. Lause 5.5 põhjal $G(m)q = f$ ehk $m : (q, Q) \rightarrow (f, P)$ kategoorias $(A \downarrow G)$.

Kui $n : (q, Q) \rightarrow (f, P)$ on kategooria $(A \downarrow G)$ selline morfism, et $p_i n = q_i$ iga $i \in I$ korral, siis $m = n$ korrutise P universaalomaduse põhjal.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Kategoorias } (A \downarrow G) : & \begin{array}{ccc} (q, Q) & & \\ \downarrow m & \searrow q_i & \\ (f, P) & \xrightarrow{p_i} & (f_i, B_i) \end{array} & \text{Kategoorias } \mathcal{B} : \begin{array}{ccc} Q & & \\ \downarrow m & \searrow q_i & \\ P & \xrightarrow{p_i} & B_i \end{array}
 \end{array}$$

2. Näitame, et kategoorias $(A \downarrow G)$ leiduvad võrdsustajad. Vaatleme morfisme $s, t : (f, B) \rightarrow (g, C)$ kategoorias $(A \downarrow G)$. Olgu $e : E \rightarrow B$ morfismide $s, t : B \rightarrow C$ võrdsustaja kategoorias $\mathcal{B}$. Siis muuhulgas $se = te$. Kuna G säilitab võrdsustajaid, siis $G(e) : G(E) \rightarrow G(B)$ on morfismide $G(s), G(t)$ võrdsustaja kategoorias $\mathcal{A}$.

$$\begin{array}{ccccc} G(E) & \xrightarrow{G(e)} & G(B) & \xrightleftharpoons[G(t)]{G(s)} & G(C) \\ & \nwarrow h & \uparrow f & \nearrow g & \\ & & A & & \end{array}$$

Et $G(s)f = g = G(t)f$, siis leidub ühene morfism $h : A \rightarrow G(E)$ nii, et $G(e)h = f$. Teiste sõnadega, $e : (h, E) \rightarrow (f, B)$ kategoorias $(A \downarrow G)$.

$$\begin{array}{ccccc} (h, E) & \xrightarrow{e} & (f, B) & \xrightleftharpoons[t]{s} & (g, C) \\ & \nwarrow l & \nearrow k & & \\ & & (d, D) & & \end{array}$$

Näitamaks, et e on s, t võrdsustaja kategoorias $(A \downarrow G)$, vaatleme morfismi $k : (d, D) \rightarrow (f, B)$ kategoorias $(A \downarrow G)$, mille korral $sk = tk$. Kuna e on s, t võrdsustaja kategoorias $\mathcal{B}$, siis leidub ühene morfism $l : D \rightarrow E$ kategoorias $\mathcal{B}$ nii, et $el = k$. Kuna

$$G(e)G(l)d = G(el)d = G(k)d = f,$$

siis h ühesusest järeldub, et $G(l)d = h$, seega $l : (d, D) \rightarrow (h, E)$ kategoorias $(A \downarrow G)$. Selle l ühesus kategoorias $(A \downarrow G)$ järeldub tema ühesusest kategoorias $\mathcal{B}$. ■

Järeldus 6.9. Kui $\mathcal{B}$ on täielik kategooria ja funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ säilitab piire, siis kategooria $(A \downarrow G)$ on täielik.

Teoreem 6.10 (Kaasfunktoriteoreem). Olgu $\mathcal{B}$ täielik kategooria. Funktoril $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ leidub vasakpoolne kaasfunktor parajasti siis, kui G säilitab piire ja kategooria $(A \downarrow G)$ rahuldab lahendihulga tingimust iga $A \in \mathcal{A}_0$ korral.

Märgime, et ilmutatult tähendab lahendihulga tingimus kategooria $(A \downarrow G)$ jaoks seda, et leidub objektide hulk $S_A \subseteq \mathcal{B}_0$ nii, et

$$(\forall B \in \mathcal{B}_0)(\forall f : A \rightarrow G(B))(\exists B' \in S_A)(\exists f' : A \rightarrow G(B'))(\exists h : B' \rightarrow B)(G(h)f' = f).$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f'} & G(B') \\ & \searrow f & \downarrow G(h) \\ & & G(B) \end{array} \quad \begin{array}{c} B' \\ \downarrow h \\ B \end{array}$$

Tõestus. Tarvilikkus. Funktor G säilitab kõiki piire lause 6.6 põhjal. Kui $F \dashv G$, siis võime võtta $S_A := \{F(A)\}$ ja kasutada universaalset morfismi $\eta_A : A \rightarrow (GF)(A)$.

Piisavus. Teoreemi 6.5(2), põhjal piisab konstrueerida iga objekti $A \in \mathcal{A}_0$ jaoks objekt $B \in \mathcal{B}_0$ ja universaalne morfism $\eta_A : A \rightarrow G(B)$ objektist A funktorisse G . Teiste sõnadega, peame näitama, et kategoorias $(A \downarrow G)$ leidub algobjekt iga $A \in \mathcal{A}_0$ korral. Kuna teame, et $(A \downarrow G)$ rahuldab lahendihulga tingimust, siis teoreemi 6.7 rakendamiseks peame tõestama ainult seda, et $(A \downarrow G)$ on täielik kui seda on $\mathcal{B}$. See aga järeldub eelmisest lemmast. ■

Näide 6.11. Olgu A ja B kategooriatena vaadeldud järjestatud hulgad ja olgu B täielik, see tähendab, et hulgas B on olemas kõikvõimalikud alumised rajad. Kovariantsel funktoril (s.t. järjestust säilitaval kujutusel) $g : B \rightarrow A$ on olemas vasakpoolne kaasfunktor parajasti siis, kui g säilitab kõik alumised rajad. Lahendihulga tingimus on rahuldatud, sest kategooria $(a \downarrow g)$ on väike iga $a \in A$ korral.

6.5. Kategooriate ekvivalentsus

Meenutame, et funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ on täielik ja täpne (vt. definitsiooni 3.9), kui mistahes objektide $B, B' \in \mathcal{B}_0$ korral on kujutus

$$G_1^{B,B'} : \mathcal{B}(B, B') \rightarrow \mathcal{A}(G(B), G(B')), \quad h \mapsto G(h)$$

bijektiivne.

Lause 6.12. Olgu $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ adjunktsioon ning olgu $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$ ja $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$ selle adjunktsiooni ühik ja koühik (vt. teoreemi 6.3). Siis

1. G on täielik ja täpne parajasti siis, kui ε on loomulik isomorfism;
2. kui ε on loomulik isomorfism, siis ka $\eta * G$ ja $F * \eta$ on loomulikud isomorfismid.

Tõestus. 1. **Tarvilikkus.** Peame näitama, et iga $B \in \mathcal{B}_0$ korral $\varepsilon_B : (FG)(B) \rightarrow B$ on isomorfism kategoorias $\mathcal{B}$. Olgu $B \in \mathcal{B}_0$. Siis kategooria $\mathcal{A}$ morfismi $\eta_{G(B)} : G(B) \rightarrow (GFG)(B)$ jaoks leidub G täielikkuse tõttu selline morfism $h_B : B \rightarrow (FG)(B)$, et $\eta_{G(B)} = G(h_B)$. Järelikult

$$G(\varepsilon_B h_B) = G(\varepsilon_B)G(h_B) = G(\varepsilon_B)\eta_{G(B)} = 1_{G(B)} = G(1_B),$$

kus eelviimane võrdus kehtib kolmnurksamasuse (29) tõttu. Tänu G täpsusele saame võrduse $\varepsilon_B h_B = 1_B$. Kasutades võrdusi (26) ja (29) saame

$$\begin{aligned} \varphi_{G(B), (FG)(B)}(h_B \varepsilon_B) &= G(h_B \varepsilon_B)\eta_{G(B)} = G(h_B)G(\varepsilon_B)\eta_{G(B)} = G(h_B)1_{G(B)} = \eta_{G(B)} \\ &= 1_{(GFG)(B)}\eta_{G(B)} = G(1_{(FG)(B)})\eta_{G(B)} = \varphi_{G(B), (FG)(B)}(1_{(FG)(B)}), \end{aligned}$$

kust $h_B \varepsilon_B = 1_{(FG)(B)}$ kujutuse $\varphi_{G(B), (FG)(B)}$ injektiivsuse tõttu. Seega ε_B on isomorfism.

Piisavus. Kui ε on loomulik isomorfism, siis iga $B, B' \in \mathcal{B}_0$ korral on kujutus $-\circ \varepsilon_B : \mathcal{B}(B, B') \rightarrow \mathcal{B}((FG)(B), B')$ bijektiivne (tema pöördkujutus on $-\circ \varepsilon_B^{-1}$), seega ka kompositsioon

$$\mathcal{B}(B, B') \xrightarrow{-\circ \varepsilon_B} \mathcal{B}((FG)(B), B') \xrightarrow{\varphi_{G(B), B'}} \mathcal{A}(G(B), G(B'))$$

on bijektiivne. Osutub, et see kompositsioon ongi $G_1^{B,B'}$, sest

$$(\varphi_{G(B), B'} \circ (-\circ \varepsilon_B))(b) = \varphi_{G(B), B'}(b \varepsilon_B) = G(b \varepsilon_B)\eta_{G(B)} = G(b)G(\varepsilon_B)\eta_{G(B)} = G(b).$$

iga morfismi $b : B \rightarrow B'$ korral.

2. Kui ε on loomulik isomorfism, siis iga $A \in \mathcal{A}_0$ ja $B \in \mathcal{B}_0$ korral ε_B ja $\varepsilon_{F(A)}$ on isomorfismid ja seega kolmnurksamasustest $G(\varepsilon_B)\eta_{G(B)} = 1_{G(B)}$ ja $\varepsilon_{F(A)}F(\eta_A) = 1_{F(A)}$ järeldub, et ka $(\eta * G)_B = \eta_{G(B)}$ ja $(F * \eta)_A = F(\eta_A)$ on isomorfismid. ■

Definitsioon 6.13. Funktorit $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ nimetatakse **kategooriate ekvivalentsiks**, kui leidub funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ning loomulikud isomorfismid $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$ ja $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$. Sellisel juhul öeldakse, et kategooriad $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on **ekvivalentsed**.

Definitsioon 6.14. Funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ on **tihe**, kui iga $A \in \mathcal{A}_0$ korral leidub selline $B \in \mathcal{B}_0$, et $G(B) \cong A$.

Teoreem 6.15. Funktori $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ jaoks on järgmised väited samaväärsed.

1. Funktor G on kategooriate ekvivalents.
2. Funktoril G leidub selline vasakpoolne kaasfunktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, et adjunktsiooni ühik $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$ ja koühik $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$ on loomulikud isomorfismid.
3. Funktor G on täielik ja täpne ning tal leidub täielik ja täpne vasakpoolne kaasfunktor F .
4. Funktor G on täielik, täpne ja tihe.

Tõestus. 3. $\Rightarrow$ 2. See järelneb lausest 6.12 ja tema duaalsest lausest.

2. $\Rightarrow$ 1. See on ilmne.

1. $\Rightarrow$ 4. Leidugu funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ja loomulikud isomorfismid $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$ ja $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$. Siis iga $A \in \mathcal{A}_0$ on isomorfe objektiga $G(F(A))$, kus $F(A) \in \mathcal{B}_0$, ja seega G on tihe.

Näitame, et F on täpne. Selleks oletame, et $F(f) = F(g)$, kus $f, g \in \mathcal{A}(A, A')$. Siis ka $(GF)(f) = (GF)(g)$. Et η on loomulik teisendus, siis

$$\eta_{A'} f = (GF)(f) \eta_A = (GF)(g) \eta_A = \eta_{A'} g.$$

Kuna $\eta_{A'}$ on isomorfism, siis saame, et $f = g$. Seega F on täpne. Analoogiliselt saab näidata, et G on täpne.

Tõestame veel, et F on täielik. Olgu $A, A' \in \mathcal{A}_0$ ja $g \in \mathcal{B}(F(A), F(A'))$. Vaatleme morfismi

$$f := \eta_{A'}^{-1} G(g) \eta_A : A \rightarrow A'.$$

Kuna η on loomulik teisendus, siis on diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & (GF)(A) \\ f \downarrow & & \downarrow (GF)(f) \\ A' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & (GF)(A') \end{array}$$

kommutatiivne. Järelikult

$$G(g) \eta_A = \eta_{A'} f = (GF)(f) \eta_A.$$

Kuna η_A on isomorfism, siis saame siit, et $G(g) = (GF)(f) = G(F(f))$. Funktori G täpsuse tõttu $g = F(f)$, millega on näidatud F täielikkus. Funktori G jaoks on tõestus analoogiline.

4. $\Rightarrow$ 3. Olgu G täielik, täpne ja tihe. Peame konstrueerima G vasakpoolse kaasfunktori $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Selleks kasutame teoreemi 6.5 tingimust 2. Funktori G tiheduse tõttu saame iga objekti $A \in \mathcal{A}_0$ jaoks valida objekti $F_0(A) \in \mathcal{B}_0$ ja isomorfismi $\eta_A : A \rightarrow G(F_0(A))$. Veendume, et η_A on universaalne morfism objektist A funktoresse G . Olgu $g : A \rightarrow G(B)$ mingi morfism kategoorias $\mathcal{A}$. Siis $g\eta_A^{-1} : G(F_0(A)) \rightarrow G(B)$ ning seega G täpsuse ja täielikkuse tõttu leidub selline üheselt määratud morfism $f : F_0(A) \rightarrow B$, et $G(f) = g\eta_A^{-1}$ ehk $G(f)\eta_A = g$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F_0(A)) \\ & \searrow g & \downarrow G(f) \\ & & G(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & F_0(A) \\ & & \downarrow f \\ & & B \end{array}$$

Kui ka $G(f')\eta_A = g$, kus $f' : F_0(A) \rightarrow B$, siis $G(f) = g\eta_A^{-1} = G(f')$, kust $f = f'$, sest G on täpne. Teoreemi 6.5 tingimuse 2 põhjal leidub adjunksioon $\langle F, G, \varphi \rangle$, mille ühik on η . Tänu morfismide η_A valikule on $\eta = (\eta_A)_{A \in \mathcal{A}_0}$ loomulik isomorfism ja seega lause 6.12 duaalse lause põhjal on F täielik ja täpne. ■

Seega funktori $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ jaoks kehtivad järgmised implikatsioonid:

$$G \text{ on isomorfism} \Rightarrow G \text{ on ekvivalent} \Rightarrow G \text{ omab vasakpoolset kaasfunktorit.}$$

Näited 6.16. 1. Kõigi lõplike hulkade kategooria $\mathbf{Set}_f$ on ekvivalentne oma täieliku alamkategooriaga $\mathbf{Set}_{\mathbb{N}}$, mille objektid on hulgad $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ja tühi hulk $\emptyset =: \mathbb{N}_0$.

Iga lõpliku hulga A jaoks valime välja ühe bijektsiooni $\eta_A : A \rightarrow \mathbb{N}_{|A|}$. See valik tuleks teha nii, et kui $A = \mathbb{N}_n$, siis $\eta_A = 1_{\mathbb{N}_n}$. Vaatleme sisestusfunktorit $I : \mathbf{Set}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{Set}_f$ ja funktoori $F : \mathbf{Set}_f \rightarrow \mathbf{Set}_{\mathbb{N}}$, mis on defineeritud eeskirjaga

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{N}_{|A|} \\ f \downarrow & & \downarrow \eta_B f \eta_A^{-1} \\ B & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{N}_{|B|} \end{array}$$

On lihtne näha, et $\eta = (\eta_A)_{A \in (\mathbf{Set}_f)_0} : 1_{\mathbf{Set}_f} \Rightarrow IF$ ja $\varepsilon = (1_{\mathbb{N}_n})_{\mathbb{N}_n \in (\mathbf{Set}_{\mathbb{N}})_0} : FI \Rightarrow 1_{\mathbf{Set}_{\mathbb{N}}}$ on loomulikud isomorfismid.

2. Olgu K korpus, Vec_K kõigi lõplikumõõtmeliste vektorruumide (välja arvatud nullruum) kategooria üle K ja Mat_K kategooria, mille objektideks on naturaalarvud, morfismide hulk $\text{Mat}_K(m, n)$ koosneb $(m \times n)$ -maatriksitest üle K ja morfismide komponeerimine on maatriksite korrutamine (vt. näidet 1.5 (1)). Näitame, et need kategooriad on duaalselt ekvivalentsed, s.t. Vec_K on ekvivalentne kategooria Mat_K duaalse kategooriaga.

Selleks fikseerime igas mittetriviaalses lõplikumõõtmelises vektorruumis V mingi baasi e^V ja defineerime kontravariantsed funktorid

$$\begin{array}{ccc}
 F : \text{Vec}_K & \longrightarrow & \text{Mat}_K \\
 V \longmapsto \dim V & & \\
 \downarrow f & \uparrow A_f^{e^V, e^U} & \\
 U \longmapsto \dim U & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 G : \text{Mat}_K & \longrightarrow & \text{Vec}_K \\
 m \longmapsto K^m & & \\
 \downarrow A & \uparrow (A \cdot (-)^T)^T & \\
 n \longmapsto K^n, & &
 \end{array}$$

kus $A_f^{e^V, e^U}$ on lineaarkujutuse $f : V \rightarrow U$ maatriks baaside e^V ja e^U suhtes. Defineerides iga mittetriviaalse lõplikumõõtmelise vektorruumi V korral morfismi $\eta_V : V \rightarrow (GF)(V) = K^{\dim V}$ kui lineaarkujutuse, mis viib vektori $a \in V$ tema koordinaatide vektoriks baasi e^V suhtes, ja iga naturaalarvu m korral morfismi $\varepsilon_m : (FG)(m) = m \rightarrow m$ kui m -ndat järku ühikmaatriksi E_m saame nõutavad loomulikud isomorfismid.

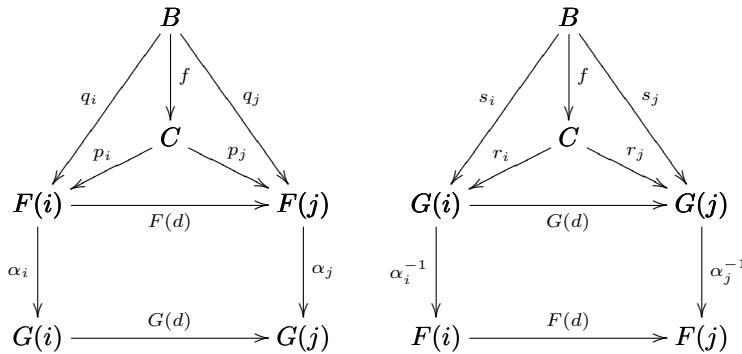
Kuigi kategooriate ekvivalentsus on nõrgem seos kui isomorfsus, on see siiski piisavalt tugev, et kõik kategooriaolulised omadused kanduksid mingilt kategoorialt üle temaga ekvivalentsetele kategooriatele. Järgnevas näitame, et kui mingis kategoorias on olemas teatud tüüpi piirid, siis temaga ekvivalentses kategoorias on olemas sama tüüpi piirid.

Lemma 6.17. *Kui funktorid $F, G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ on loomulikult isomorfsed, siis kategooriad $\text{cone}(F)$ ja $\text{cone}(G)$ on isomorfsed.*

Tõestus. Olgu $\alpha : F \Rightarrow G$ loomulik isomorfism ja tähistame $I = \mathcal{D}_0$. Defineerime funktorid

$$\begin{array}{ccc}
 M : \text{cone}(F) & \longrightarrow & \text{cone}(G) \\
 (B, (q_i)_{i \in I}) \longmapsto (B, (\alpha_i q_i)_{i \in I}) & & \\
 \downarrow f & & \downarrow f \\
 (C, (p_i)_{i \in I}) \longmapsto (C, (\alpha_i p_i)_{i \in I}) & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 N : \text{cone}(G) & \longrightarrow & \text{cone}(F) \\
 (B, (s_i)_{i \in I}) \longmapsto (B, (\alpha_i^{-1} s_i)_{i \in I}) & & \\
 \downarrow f & & \downarrow f \\
 (C, (r_i)_{i \in I}) \longmapsto (C, (\alpha_i^{-1} r_i)_{i \in I}). & &
 \end{array}$$

Kui $(B, (q_i)_{i \in I}) \in \text{cone}(F)$, siis $(B, (\alpha_i q_i)_{i \in I}) \in \text{cone}(G)$ teisenduse α loomulikkuse tõttu (vt. vasakpoolset joonist allpool). Samuti on lihtne näha, et kui $f : (B, (q_i)_{i \in I}) \rightarrow (C, (p_i)_{i \in I})$ kategoorias $\text{cone}(F)$, siis $f : (B, (\alpha_i q_i)_{i \in I}) \rightarrow (C, (\alpha_i p_i)_{i \in I})$ kategoorias $\text{cone}(G)$. On selge, et M ja N on funktorid ning $MN = 1_{\text{cone}(G)}$ ja $NM = 1_{\text{cone}(F)}$.



Lause 6.18. Kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on ekvivalentsed kategooriad ja kategoorias $\mathcal{B}$ on olemas $\mathcal{D}$ -piirid, kus $\mathcal{D}$ on väike kategooria, siis ka kategoorias $\mathcal{A}$ on olemas $\mathcal{D}$ -piirid.

Tõestus. Eelduse põhjal leiduvad funktorid $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ja $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ning loomulikud isomorfismid $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$ ja $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$. Vaatleme väikest kategooriat $\mathcal{D}$ ja funktoori $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$. Siis funktoril $FH : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ on olemas piir. Teoreemi 6.15 põhjal on funktoril G olemas vasakpoolne kaasfunktor (see on F) ja seega lause 6.6 tõttu säilitab G funktori FH piiri, s.t. viib selle funktori $GFH : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ piiriks, mis on kategooria $\text{cone}(GFH)$ lõppobjekt. Funktor GFH on aga loomulikult isomorfne funkoriga H , sest on olemas loomulik isomorfism $\eta * H : H \Rightarrow GFH$. Lemma 6.17 tõttu on kategooriad $\text{cone}(GFH)$ ja $\text{cone}(H)$ isomorfsed. Järelikult on ka kategoorias $\text{cone}(H)$ olemas lõppobjekt, s.t. funktoril H on olemas piir kategoorias $\mathcal{A}$. ■

Lõpetuseks ütleme veel mõne sõna adjunktsioonide komponeerimise kohta.

Lause 6.19. Olgu $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ adjunktsioon ühikuga η ja koühikuga ε ning $\langle F', G', \varphi' \rangle : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ adjunktsioon ühikuga η' ja koühikuga ε' . Siis $\langle F'F, GG', \varphi\varphi' \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ on adjunktsioon, mille ühik on $(G * \eta' * F) \circ \eta$ ja koühik on $\varepsilon' \circ (F' * \varepsilon * G')$.

Tõestus. Märgime, et iga $A \in \mathcal{A}_0$ ja $C \in \mathcal{C}_0$ korral

$$\begin{aligned} ((G * \eta' * F) \circ \eta)_A &= G(\eta'_{F(A)}) \circ \eta_A, \\ (\varepsilon' \circ (F' * \varepsilon * G'))_C &= \varepsilon'_C \circ F'(\varepsilon_{G'(C)}). \end{aligned}$$

Meil on bijektsioonid

$$\mathcal{C}(F'(F(A)), C) \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{B}(F(A), G'(C)) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}(A, G(G'(C))),$$

mis on loomulikud A ja C suhtes, seega $F'F \dashv GG'$. Selle adjunktsiooni ühiku A -komponendi saame, kui võtame $C := F'(F(A))$ ja rakendame kompositsiooni $\varphi\varphi'$ ühikmorfismile (vt. valemit (31)) ning lisaks sellele kasutame veel omadust (26):

$$\varphi(\varphi'(1_{F'(F(A))})) = \varphi(\eta'_{F(A)}) = G(\eta'_{F(A)}) \circ \eta_A.$$

Seega adjunktsiooni $F'F \dashv GG'$ ühik on $(G * \eta' * F) \circ \eta$. Analoogiliselt saab tõestada väite koühiku kohta. ■

Järeldus 6.20. Kategooriate ekvivalentsus on ekvivalentsiseos.

Tõestus. On lihtne näha, et kategooriate ekvivalentsus on refleksiivne ja sümmeetriline. Näitame, et ta on transitiivne. Selleks oletame, et kategooria $\mathcal{A}$ on ekvivalentne kategooriaga $\mathcal{B}$ ja kategooria $\mathcal{B}$ on ekvivalentne kategooriaga $\mathcal{C}$, kusjuures nende vahel on funktorid F, F', G, G' nii nagu eelmises lauses. Siis η, η', ε ja ε' on loomulikud isomorfismid. Järelikult ka adjunktsiooni $F'F \dashv GG'$ ühik ja koühik on loomulikud isomorfismid, sest nad on saadud loomulike isomorfismide komponeerimisel. Seega kategooriad $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{C}$ on ekvivalentsed teoreemi 6.15 põhjal. ■

6.6. Reflektiivsed alamkategooriad

Definitsioon 6.21. Kategooria $\mathcal{A}$ täielikku alamkategooriat $\mathcal{B}$ nimetatakse **reflektiivseks alamkategooriaks**, kui

1. sisestusfunktoril $I : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ leidub vasakpoolne kaasfunktor $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$,
2. $\mathcal{B}$ sisaldab koos iga objektiga B kõik sellega isomorfsed $\mathcal{A}$ objektid (kui $B \cong A$, $B \in \mathcal{B}_0$ ja $A \in \mathcal{A}_0$, siis $A \in \mathcal{B}_0$).

Lause 6.22. Kui $\mathcal{B}$ on täieliku kategooria $\mathcal{A}$ reflektiivne alamkategooria, siis $\mathcal{B}$ on täielik.

Tõestus. Olgu $R \dashv I$, kus $I : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ on sisestusfunktor. Vaatleme väikest kategooriat $\mathcal{D}$ ja funktoori $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$.

Kategooria $\mathcal{A}$ täielikkuse tõttu leidub funktoiril $ID : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ piir $(L, (p_i)_{i \in \mathcal{D}_0})$ kategoorias $\mathcal{A}$. Olgu adjunktsiooni $R \dashv I$ ühik $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow IR$. Teoreemi 6.3 tõttu on $\eta_L : L \rightarrow I(R(L))$ universaalne morfism objektist L funktooris I .

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\eta_L} & I(R(L)) \\ & \searrow p_i & \downarrow I(q_i) \\ & & I(D(i)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & R(L) \\ & & \downarrow q_i \\ & & D(i) \end{array}$$

Seega iga $i \in \mathcal{D}_0$ korral leidub üheselt määratud morfism $q_i : R(L) \rightarrow D(i)$ kategoorias $\mathcal{B}$ nii, et

$$I(q_i) \circ \eta_L = p_i.$$

Kui $d : i \rightarrow j$ kategoorias $\mathcal{D}$, siis

$$I(D(d) \circ q_i) \circ \eta_L = I(D(d)) \circ I(q_i) \circ \eta_L = I(D(d)) \circ p_i = p_j.$$

Kuna q_j on üheselt määratud morfism, mille korral $I(q_j) \circ \eta_L = p_j$, siis $D(d) \circ q_i = q_j$. See tähendab, et $(R(L), (q_i)_{i \in \mathcal{D}_0}) \in \text{cone}(D)$.

$$\begin{array}{ccc} & R(L) & \\ q_i \swarrow & & \searrow q_j \\ D(i) & \xrightarrow{D(d)} & D(j) \end{array}$$

Järelikult $(I(R(L)), (I(q_i))_{i \in \mathcal{D}_0}) \in \text{cone}(ID)$.

$$\begin{array}{ccc} & I(R(L)) & \\ I(q_i) \swarrow & \downarrow \mu_L & \searrow I(q_j) \\ & L & \\ p_i \swarrow & & \searrow p_j \\ I(D(i)) & \xrightarrow{I(D(d))} & I(D(j)) \end{array}$$

Universaalomaduse põhjal leidub üheselt määratud morfism $\mu_L : I(R(L)) \rightarrow L$ nii, et $p_i \circ \mu_L = I(q_i)$ iga $i \in \mathcal{D}_0$ korral. Siis aga

$$p_i \circ \mu_L \circ \eta_L = I(q_i) \circ \eta_L = p_i = p_i \circ 1_L,$$

millest järeldub võrdus $\mu_L \circ \eta_L = 1_L$.

Teisest küljest, kuna funktoir I on täielik ja täpne, siis morfismi $\eta_L \circ \mu_L : I(R(L)) \rightarrow I(R(L))$ jaoks leidub üheselt määratud morfism $\nu_L : R(L) \rightarrow R(L)$ nii, et $\eta_L \circ \mu_L = I(\nu_L)$. Siis aga

$$I(\nu_L) \circ \eta_L = (\eta_L \circ \mu_L) \circ \eta_L = \eta_L \circ (\mu_L \circ \eta_L) = \eta_L.$$

Kuna kommutatiivses diagrammis

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\eta_L} & I(R(L)) \\ & \searrow \eta_L & \downarrow I(\nu_L) \\ & & I(R(L)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & R(L) \\ & & \downarrow \nu_L \\ & & R(L) \end{array}$$

on ν_L üheselt määratud ja tema ossa sobib ka $1_{R(L)}$, siis $\nu_L = 1_{R(L)}$. Seega $\eta_L \circ \mu_L = I(1_{R(L)}) = 1_{I(R(L))}$ ja η_L on isomorfism kategoorias $\mathcal{A}$. Kuna

$$L \cong I(R(L)) = R(L) \in \mathcal{B}_0,$$

siis reflektiivse alamkategooria definitsiooni põhjal $L \in \mathcal{B}_0$ ning samuti morfismid p_i kuuluvad kategooriasse $\mathcal{B}$. Järelikult $(L, (p_i)_{i \in \mathcal{D}_0}) \approx \lim D$. ■

Märkus 6.23. Tõestatud lause näitab, et täieliku kategooria $\mathcal{A}$ reflektiivses alamkategoorias $\mathcal{B}$ saab piire konstrueerida samamoodi nagu kategoorias $\mathcal{A}$.

Lause 6.24. Kui $\mathcal{B}$ on kotäieliku kategooria $\mathcal{A}$ reflektiivne alamkategooria, siis $\mathcal{B}$ on kotäielik.

Tõestus. Olgu $R \dashv I$, kus $I : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ on sisestusfunktor. Vaatleme väikest kategooriat $\mathcal{D}$ ja funktoore $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$. Kuna $\mathcal{A}$ on kotäielik, siis funktoore $ID : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ leidub kopiir, olgu see $(L, (u_i)_{i \in \mathcal{D}_0})$. Et vasakpoolne kaasfunktor säilitab kopiire, siis

$$(R(L), (R(u_i))_{i \in \mathcal{D}_0}) \approx \text{colim}(RID).$$

Funktor I on täielik ja täpne, seega adjunktsiooni $R \dashv I$ kühik $RI \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$ on loomulik isomorfism (vt. lauset 6.12). Seega $RI \cong 1_{\mathcal{B}}$ ja $RID \cong D$. Kasutades lemma 6.17 analoogi kokoonuste jaoks saame öelda, et kategooriad $\text{cocone}(RID)$ ja $\text{cocone}(D)$ on isomorfsed. Kuna kategoorias $\text{cocone}(RID)$ leidub algobjekt, siis ka kategoorias $\text{cocone}(D)$ leidub algobjekt ehk teiste sõnadega funktoore D on olemas kopiir. ■

Näide 6.25. Osutub, et täielike meetriliste ruumide kategooria $\mathbf{CMet}$ on meetriliste ruumide kategooria $\mathbf{Met}$ reflektiivne alamkategooria. Mõlemas kategoorias on morfismideks isomeetriad (kaugust säilitavad kujutused). Kui (X, d) ja (X', d') on meetrilised ruumid, siis kujutust $f : X \rightarrow Y$ nimetatakse **isomeetriaks**, kui

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

mistahes $x, y \in X$ korral.

Meetriline ruum (X, d) on **täielik**, kui iga Cauchy jada selles ruumis koondub. Teiste sõnadega:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0 \implies \exists y \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) = 0.$$

Iga meetrilise ruumi (X, d) jaoks on võimalik konstrueerida tema täiend, mida me tähistame (X^*, d^*) . See konstruktsioon on järgmine. Olgu $C(X)$ kõigi Cauchy jadade hulk ruumis X . Defineerime sellel hulgal seose $\sim$ järgmiselt:

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Saab näidata, et $\sim$ on ekvivalentsuhe. Tähistame faktorhulka

$$X^* := C(X) / \sim = \{[(x_n)] \mid (x_n) \in C(X)\}.$$

Sellel hulgal saab defineerida meetrika $d^* : X^* \times X^* \rightarrow [0, \infty)$ võrdusega

$$d^*([(x_n)], [(y_n)]) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

nii et tulemuseks on meetriline ruum (X^*, d^*) .

Defineerime funktoore $R : \mathbf{Met} \rightarrow \mathbf{CMet}$ järgmiselt:

$$\begin{array}{ccc} (X_1, d_1) & \longmapsto & (X_1^*, d_1^*) \\ \downarrow f & & \downarrow f^* \\ (X_2, d_2) & \longmapsto & (X_2^*, d_2^*) \end{array},$$

kus

$$f^*([(x_n)]) := [(f(x_n))].$$

Saab näidata, et R on sisestusfunktoore $I : \mathbf{CMet} \rightarrow \mathbf{Met}$ vasakpoolne kaasfunktor.

6.7. Ülesanded

Ülesanded 6.26. 1. Tõestada, et kui $F, G : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ on bifunktoore ja $\varphi = (\varphi_{A,B})_{(A,B) \in (\mathcal{A} \times \mathcal{B})_0} : F \Rightarrow G$ on loomulik A ja B suhtes, siis ta on loomulik (A, B) suhtes.

2. Valida mingi konkreetne adjunktsioon ja kirjutada ilmutatult välja selle ühik, kühik ja bijektsioon φ .

3. Tõestada, et filtreeritud kategooriaga ekvivalentne kategooria on ka filtreeritud.

7. Abeli kategooriad

7.1. Ab-kategooriad

Lisaks harilikele kategooriatele on tihti kasulik vaadelda niinimetatud rikastatud kategooriaid. Need on sellised kategooriad, mille morfismihulkadel on antud teatud lisastruktuur (näiteks algebraline, topoloogiline või järjestusstruktuur) ning see lisastruktuur peab olema kooskõlas morfismide komponeerimisega. Me vaatleme siin rikastatud kategooriate ühte tähtsamat juhtu — kategooriaid, mis on rikastatud Abeli rühmade abil.

Definitsioon 7.1. Kategooriat $\mathcal{A}$ nimetatakse **Ab-kategooriaks** (ehk eeladitiivseks kategooriaks), kui iga mor-hulk $\mathcal{A}(A, B)$ on Abeli rühm ja

$$\begin{aligned}(f + g)h &= fh + gh, \\ k(f + g) &= kf + kg\end{aligned}$$

mistahes morfismide $f, g \in \mathcal{A}(A, B)$, $h \in \mathcal{A}(C, A)$ ja $k \in \mathcal{A}(B, D)$ korral.

Kui $\mathcal{A}$ on Ab-kategooria, siis kõigi Abeli rühmade $\mathcal{A}(A, B)$ (mis on erinevad) tehet me tähistame ühtemoodi sümboliga $+$. Igas sellises Abeli rühmas leidub nullelement, mida me tähistame sümboliga 0 .

Näide 7.2. Abeli rühmade kategooria **Ab**, vektorruumide (üle korpuse K) kategooria Vec_K ja ringide kategooria **Rng** on Ab-kategooriad. Kui näiteks A ja B on Abeli rühmad, siis homomorfismide hulga $\text{Ab}(A, B)$ saab muuta Abeli rühmaks, kui liitmine defineerida punktiivisiliselt:

$$(f + g)(a) := f(a) + g(a),$$

$f, g \in \text{Ab}(A, B)$, $a \in A$.

Lemma 7.3. Kui $\mathcal{A}$ on Ab-kategooria ja $f \in \mathcal{A}(A, B)$, siis

$$0f = 0 \quad \text{ja} \quad f0 = 0.$$

Tõestus. Vaatleme morfisme

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{0} C.$$

Siis

$$0f = (0 + 0)f = 0f + 0f.$$

Liites selle võrduse mõlemale poolele morfismi $-0f : A \rightarrow C$ saame, et $0f = 0 : A \rightarrow C$. Võrduse $f0 = 0$ tõestus on analoogiline. ■

Meenutame, et nullobjekt on objekt, mis on samaaegselt alg- ja lõppobjekt. Nullobjekti tähistatakse enamasti sümboliga **0**.

Lause 7.4. Ab-kategooria $\mathcal{A}$ objekti A jaoks on järgmised väited samaväärsed:

1. A on algobjekt;
2. A on lõppobjekt;
3. A on nullobjekt.

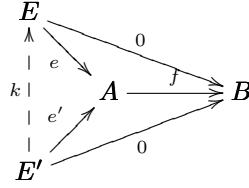
Tõestus. Definitsiooni põhjal $3 \Rightarrow 1$ ja $3 \Rightarrow 2$. Duaalsuse tõttu piisab näidata, et $1 \Rightarrow 3$. Olgu A algobjekt. Siis hulk $\mathcal{A}(A, A)$ on ühe-elementiline ja seega 1_A on Abeli rühma $\mathcal{A}(A, A)$ nullelement. Kui $B \in \mathcal{A}_0$, siis $\mathcal{A}(B, A)$ sisaldab vähemalt ühte elementi — rühma $\mathcal{A}(B, A)$ nullelementi. Kui aga $f \in \mathcal{A}(B, A)$ on suvaline morfism, siis

$$f = 1_A f = (1_A + 1_A)f = 1_A f + 1_A f = f + f$$

Abeli rühmas $\mathcal{A}(B, A)$. Liites võrduse $f = f + f$ mõlemale poolele elemendi $-f$ saame, et f on rühma $\mathcal{A}(B, A)$ nullelement. Järelikult $|\mathcal{A}(B, A)| = 1$ iga $B \in \mathcal{A}_0$ korral, mis tähendab, et A on lõppobjekt ning seega ka nullobjekt. ■

Definitsioon 7.5. Olgu $\mathcal{A}$ Ab-kategooria. Morfismi $f : A \rightarrow B$ **(ko)tuumaks** nimetatakse morfimide-paari $f, 0 : A \rightarrow B$ (ko)võrdsustajat.

Seega paar (E, e) , kus $e : E \rightarrow A$, on morfismi $f : A \rightarrow B$ tuum (tähistatakse $(E, e) \approx \text{Ker } f$ või isegi $e = \text{Ker } f$), kui $fe = 0$ ja iga morfismi $e' : E' \rightarrow A$ korral, kui $fe' = 0$, siis leidub üheselt määratud morfism $k : E' \rightarrow E$ nii, et $ek = e'$.



Morfismi f kotuuma korral kasutatakse tähistust $(C, c) \approx \text{Coker } f$ või $c = \text{Coker } f$.

Näide 7.6. Abeli rühmade kategoorias $\mathbf{Ab}$ on morfismi $f : A \rightarrow B$ kanooniline tuum paar $(\ker f, \iota)$, kus $\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$ ja $\iota : \ker f \rightarrow A$ on sisestus. Morfismi $f : A \rightarrow B$ kanooniline kotuum on paar $(B/f(A), \pi)$, kus $B/f(A)$ on rühma B faktorrühm alamrühma $f(A)$ järgi ja $\pi : B \rightarrow B/f(A)$, $b \mapsto b + f(A)$ on loomulik projektsioon.

Lause 7.7. Igas Ab-kategoorias $\mathcal{A}$ on võrdsustajad tuumad ja kovõrdsustajad kotuumad.

Tõestus. Olgu $f, g : A \rightarrow B$ kategoorias $\mathcal{A}$. Näitame, et

$$(E, e) \approx \text{Eq}(f, g) \iff (E, e) \approx \text{Eq}(f - g, 0).$$

(Kovõrdsustajate jaoks on tõestus analoogiline.)

Eeldame, et $(E, e) \approx \text{Eq}(f, g)$. Siis leidub morfism $f - g$ Abeli rühmas $\mathcal{A}(A, B)$ ja $(f - g)e = fe - ge = 0$. Kui ka $e' : E' \rightarrow A$ on selline, et $(f - g)e' = 0$, siis $fe' = ge'$ ja seega leidub üheselt määratud morfism $k : E' \rightarrow E$ nii, et $ek = e'$. Sellega oleme näidanud, et $(E, e) \approx \text{Eq}(f - g, 0)$.



Eeldame nüüd, et $(E, e) \approx \text{Eq}(f - g, 0)$. Siis

$$0 = (f - g)e = fe - ge.$$

Liites selle võrduse mõlemale poolele morfismi ge saame võrduse $fe = ge$. Kui $e' : E' \rightarrow A$ on selline, et $fe' = ge'$, siis $(f - g)e' = fe' - ge' = 0$. Järelikult leidub üheselt määratud morfism $k : E' \rightarrow E$ nii, et $ek = e'$. Sellega oleme näidanud, et $(E, e) \approx \text{Eq}(f, g)$. ■

Definitsioon 7.8. Ab-kategooria $\mathcal{A}$ objektide A, B bikorrutus on viisik (P, p_A, p_B, u_A, u_B) , kus

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{p_A} \\ \xrightarrow{u_A} \end{array} P \begin{array}{c} \xleftarrow{p_B} \\ \xrightarrow{u_B} \end{array} B$$

ja

$$p_A u_A = 1_A, \quad p_B u_B = 1_B, \quad u_A p_A + u_B p_B = 1_P.$$

Näide 7.9. Abeli rühmade A ja B korral võib otsekorrutisel $P := A \times B$ defineerida liitmise komponthaaval:

$$(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b').$$

Vaadeldes homomorfisme

$$\begin{aligned} p_A : P &\rightarrow A, & (a, b) &\mapsto a, \\ p_B : P &\rightarrow A, & (a, b) &\mapsto b, \\ u_A : A &\rightarrow P, & a &\mapsto (a, 0), \\ u_B : B &\rightarrow P, & b &\mapsto (0, b) \end{aligned}$$

näeme, et (P, p_A, p_B, u_A, u_B) on Abeli rühmade A ja B bikorrutis, sest

$$\begin{aligned} p_A(u_A(a)) &= p_A(a, 0) = a, \\ p_B(u_B(b)) &= p_B(0, b) = b, \\ (u_A p_A + u_B p_B)(a, b) &= u_A(p_A(a, b)) + u_B(p_B(a, b)) = u_A(a) + u_B(b) = (a, 0) + (0, b) = (a, b) \end{aligned}$$

mistahes $a \in A$ ja $b \in B$ korral.

Teoreem 7.10. Ab-kategooria objektide A ja B jaoks on järgmised väited samaväärsed:

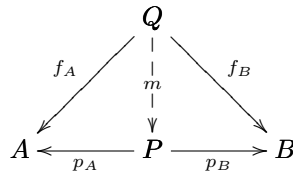
1. leidub A ja B bikorrutis;
2. leidub A ja B korrutis;
3. leidub A ja B kokorrutis.

Tõestus. 1. $\Rightarrow$ 2. Olgu (P, p_A, p_B, u_A, u_B) objektide A ja B bikorrutis. Siis

$$p_A u_B = p_A(u_A p_A + u_B p_B) u_B = p_A u_A p_A u_B + p_A u_B p_B u_B = p_A u_B + p_A u_B,$$

kust $p_A u_B = 0$ ja sümmeetriliselt $p_B u_A = 0$. Kui nüüd $f_A : Q \rightarrow A$ ja $f_B : Q \rightarrow B$, siis võttes $m := u_A f_A + u_B f_B : Q \rightarrow P$ kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} p_A m &= p_A u_A f_A + p_A u_B f_B = 1_A f_A + 0 f_B = f_A, \\ p_B m &= p_B u_A f_A + p_B u_B f_B = 0 f_A + 1_B f_B = f_B. \end{aligned}$$



Kui ka $m' : Q \rightarrow P$ on selline, et $p_A m' = f_A$ ja $p_B m' = f_B$, siis

$$m' = (u_A p_A + u_B p_B) m' = u_A p_A m' + u_B p_B m' = u_A f_A + u_B f_B = m.$$

Järelikult (P, p_A, p_B) on objektide A ja B korrutis.

2. $\Rightarrow$ 1. Olgu (P, p_A, p_B) objektide A ja B korrutis.



Siis leiduvad sellised üheselt määratud morfismid $u_A : A \rightarrow P$ ja $u_B : B \rightarrow P$, et $p_A u_A = 1_A$, $p_B u_A = 0$, $p_A u_B = 0$ ja $p_B u_B = 1_B$. Seega

$$\begin{aligned} p_A(u_A p_A + u_B p_B) &= p_A u_A p_A + p_A u_B p_B = 1_A p_A + 0 p_B = p_A, \\ p_B(u_A p_A + u_B p_B) &= p_B u_A p_A + p_B u_B p_B = 0 p_A + 1_B p_B = p_B, \end{aligned}$$

millest järeldub võrdus $u_A p_A + u_B p_B = 1_P$.

1. $\Leftrightarrow$ 3. tõestus on analoogiline. ■

7.2. Abeli kategooriad

Definitsioon 7.11. Abeli kategooria on Ab-kategooria, milles

1. leidub nullobjekt,
2. leiduvad binaarsed bikorrutised,
3. igal morfismil leidub tuum ja kotuum,
4. iga monomorfism on tuum ja iga epimorfism on kotuum.

Näide 7.12. Näitame, et Abeli rühmade kategooria **Ab** on Abeli kategooria.

Nullobjektiks selles kategoorias on ühe-elementiline Abeli rühm $\{0\}$. Binaarsete bikorrutiste olemasolu on tõestatud näites 7.9. Tänu näitele 7.6 on igal morfismil olemas tuum ja kotuum.

Tõestame, et igal monomorfismil on tuum ja iga epimorfism on kotuum. Meenutame, et kategoorias **Ab** on monomorfismideks injektiivsed rühmade homomorfismid ja epimorfismideks on surjektiivsed rühmade homomorfismid.

Olgu $f : A \rightarrow B$ suvaline monomorfism kategoorias **Ab**. Näitame, et f on loomuliku projektsiooni $\pi : B \rightarrow B/f(A)$ tuum.

1. Iga $a \in A$ korral

$$(\pi f)(a) = \pi(f(a)) = f(a) + f(A) = f(A) = 0(a),$$

seega $\pi f = 0$.

2. Olgu $g : C \rightarrow B$ selline morfism, et $\pi g = 0$. Siis $g(c) + f(A) = f(A)$ ehk $g(c) \in f(A)$ iga $c \in C$ korral. Defineerime kujutuse $k : C \rightarrow A$ võrdusega

$$k(c) := a,$$

kus $a \in A$ on selline element, et $g(c) = f(a)$. Kui $g(c) = f(a) = f(a')$, $a, a' \in A$, siis f injektiivsuse tõttu $a = a'$. See tähendab, et k on korrektselt defineeritud. Lihtne on veenduda, et k on üheselt määratud Abeli rühmade homomorfism, mille korral $fk = g$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\pi} & B/f(A) \\ & \nwarrow k & \nearrow g & & \\ & & C & & \end{array}$$

Olgu nüüd $f : A \rightarrow B$ suvaline epimorfism kategoorias **Ab**. Näitame, et f on sisestuse $\iota : \ker f \rightarrow A$, kus $\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$, kotuum.

1. On selge, et $f\iota = 0$.
2. Olgu $g : A \rightarrow C$ selline morfism, et $g\iota = 0$. Defineerime kujutuse $k : B \rightarrow C$ võrdusega

$$k(b) := g(a),$$

kus $a \in A$ on selline element, et $f(a) = b$ (selline a leidub f surjektiivsuse tõttu). Kui $b = f(a) = f(a')$, siis $f(a - a') = 0$ ja $a - a' \in \ker f$. Seega

$$0 = (g\iota)(a - a') = g(\iota(a - a')) = g(a - a') = g(a) - g(a'),$$

kust $g(a) = g(a')$. Seega k on korrektselt defineeritud. Saab näidata, et k on üheselt määratud Abeli rühmade homomorfism, mille korral $kf = g$.

$$\begin{array}{ccccc} \ker f & \xrightarrow{\iota} & A & \xrightarrow{f} & B \\ & & \searrow g & & \nearrow k \\ & & C & & \end{array}$$

Sellega on näidatud, et **Ab** on Abeli kategooria. Analoogiliselt saab näidata, et **Vec_K** ja **Rng** on Abeli kategooriad.

Lause 7.13. Abeli kategooria on lõplikult täielik ja kotäielik.

Tõestus. Definitsiooni tingimuste 1 ja 2, lause 7.4 ja teoreemi 7.10 põhjal leiduvad lõplikud korrutised ja kokorrutised. Definitsiooni tingimuse 3 ja lause 7.7 põhjal leiduvad võrdsustajad ja kovõrdsustajad. Teoreemi 5.57 ja tema dualse teoreemi põhjal on see kategooria täielik ja kotäielik. ■

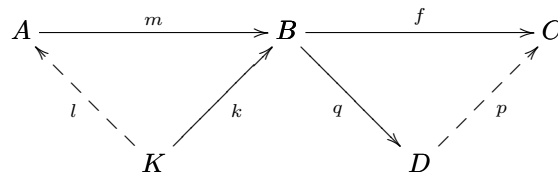
Lause 7.14. Kui m on Abeli kategooria $\mathcal{A}$ monomorfism, siis

$$m = \text{Ker}(\text{Coker } m).$$

Tõestus. Olgu $m : A \rightarrow B$ monomorfism. Siis m on mingi morfismi $f : B \rightarrow C$ tuum. Olgu $q : B \rightarrow D$ morfismi m kotuum, $q = \text{Coker } m$. Vaja oleks näidata, et

$$m = \text{Ker } q.$$

Kuna $q = \text{Coker } m$, siis $qm = 0$ ja kuna ka $fm = 0$, siis kovõrdsustaja definitsiooni tõttu leidub üheselt määratud morfism $p : D \rightarrow C$ nii, et $f = pq$. Universaalomaduse kontrollimiseks oletame, et $qk = 0$, kus $k : K \rightarrow B$. Siis $fk = pqk = p0 = 0$ ja kuna $m = \text{Ker } f$, siis leidub selline üheselt määratud morfism $l : K \rightarrow A$, et $k = ml$. Sellega olemegi näidanud, et $m = \text{Ker } q = \text{Ker}(\text{Coker } m)$.



■

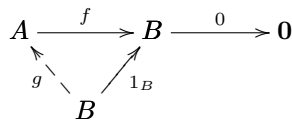
Duaalselt saab tõestada järgmise tulemuse.

Lause 7.15. Kui e on Abeli kategooria $\mathcal{A}$ epimorfism, siis

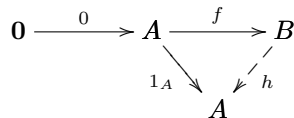
$$e = \text{Coker}(\text{Ker } e).$$

Lause 7.16. Abeli kategoorias on kõik bimorfismid isomorfismid.

Tõestus. Olgu $f : A \rightarrow B$ bimorfism Abeli kategoorias $\mathcal{A}$, mille nullobjekt on $\mathbf{0}$. Siis morfismide hulk $\mathcal{A}(B, \mathbf{0})$ koosneb täpselt ühest morfismist, milleks peab olema nullmorfism $0 : B \rightarrow \mathbf{0}$ (vastava Abeli rühma nullelement). Lihtne on veenduda, et $0 : B \rightarrow \mathbf{0}$ on morfismi f kotuum. Kuna f on monomorfism, siis lause 7.14 põhjal on f morfismi $0 : B \rightarrow \mathbf{0}$ tuum. Kuna $0 \circ 1_B = 0 : B \rightarrow \mathbf{0}$, siis tuuma definitsiooni põhjal leidub üheselt määratud morfism $g : B \rightarrow A$ nii, et $fg = 1_B$.



Duaalselt on $0 : \mathbf{0} \rightarrow A$ morfismi f tuum. Kuna f on epimorfism, siis lause 7.15 põhjal on f morfismi $0 : \mathbf{0} \rightarrow A$ kotuum. Kuna $1_A \circ 0 = 0 : \mathbf{0} \rightarrow A$, siis leidub üheselt määratud morfism $h : B \rightarrow A$ nii, et $hf = 1_A$.



Siis aga

$$h = h1_B = h(fg) = (hf)g = 1_Ag = g$$

ja f on isomorfism. ■

Järgmine tulemus üldistab muuhulgas Abeli rühmade homomorfismiteoreemi.

Teoreem 7.17. Abeli kategooria iga morfism f tegurdub kujul

$$f = me,$$

kus m on monomorfism ja e epimorfism. Veelgi enam,

$$m = \text{Ker}(\text{Coker } f) \quad \text{ja} \quad e = \text{Coker}(\text{Ker } f).$$

Kui ka $f = m'e'$, kus m' on monomorfism ja e' on epimorfism, siis leidub üheselt määratud morfism k nii, et $ke = e'$ ja $m'k = m$.

Tõestus. Olgu $f : A \rightarrow B$ Abeli kategoorias $\mathcal{A}$. Siis tal leidub kotuum $\text{Coker } f : B \rightarrow Q$. Võtame $m := \text{Ker}(\text{Coker } f) : E \rightarrow B$. Siis m kui võrdsustaja on monomorfism. Kuna $(\text{Coker } f) \circ f = 0$ ja m on $\text{Coker } f$ tuum, siis leidub selline üheselt määratud morfism $e : A \rightarrow E$, et $f = me$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\text{Coker } f} & Q \\ \downarrow e' & \searrow e & \uparrow m & & \\ D & \xrightarrow{d} & E & \xrightarrow[r]{s} & C \end{array}$$

Näitame, et e on epimorfism. Selleks oletame, et $re = se$, kus $r, s : E \rightarrow C$. Lause 7.13 tõttu leiduvad kategoorias $\mathcal{A}$ võrdsustajad. Olgu $(D, d) \approx \text{Eq}(r, s)$, muuhulgas $rd = sd$. Siis leidub üheselt määratud $e' : A \rightarrow D$ nii, et $de' = e$. Järelikult

$$f = me = mde' = m'e',$$

kus $m' := md : D \rightarrow B$ kui kahe monomorfismi korrutis on monomorfism ning seega mingi morfismi $p : B \rightarrow K$ tuum, $m' = \text{Ker } p$. Siis

$$pf = p(m'e') = (pm')e' = 0e' = 0$$

ja seega leidub selline üheselt määratud morfism $q : Q \rightarrow K$, et $q \circ (\text{Coker } f) = p$. Järelikult

$$pm = q \circ (\text{Coker } f) \circ m = q0 = 0$$

ja seega võrduse $m' = \text{Ker } p$ tõttu leidub üheselt määratud morfism $t : E \rightarrow D$ nii, et $m = m't$. Siis aga $m = m't = mdt$, kust $dt = 1_E$, sest m on monomorfism. Korrutades võrdust $rd = sd$ paremalt morfismiga t saame võrduse $r = s$. Sellega oleme näidanud, et e on epimorfism.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\text{Coker } f} & Q \\ \downarrow e' & \nearrow m' & \uparrow m & \searrow p & \downarrow q \\ D & \xleftarrow{t} & E & & K \end{array}$$

Olgu $u = \text{Ker } f : U \rightarrow A$. Näitame, et $u = \text{Ker } e$. Paneme tähele, et $meu = fu = 0 = m0$. Et m on monomorfism, siis $eu = 0$. Kui ka $eu' = 0$, kus $u' : U' \rightarrow A$, siis $0 = m0 = me u' = fu$. Kuna $u = \text{Ker } f$, siis leidub üheselt määratud morfism $v : U' \rightarrow U$ nii, et $uv = u'$. Seega $u = \text{Ker } e$. Kuna e on epimorfism, siis lause 7.14 duaalse lause põhjal

$$e = \text{Coker}(\text{Ker } e) = \text{Coker}(\text{Ker } f).$$

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow v & \nearrow u' & \searrow e & & \uparrow m \\ U' & & & & E \end{array}$$

Olgu ka $f = m'e'$, kus m' on monomorfism ja e' on epimorfism, ning olgu $u = \text{Ker } f = \text{Ker } e$. Siis $e = \text{Coker}(\text{Ker } f) = \text{Coker } u$. Kuna

$$m'0 = 0 = fu = (m'e')u = m'(e'u),$$

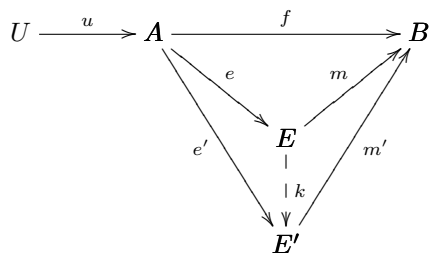
siis $e'u = 0$ ja seega leidub üheselt määratud morfism $k : E \rightarrow E'$ nii, et

$$ke = e'.$$

Siis ka $m'ke = m'e' = f = me$, kust

$$m'k = m,$$

sest e on epimorfism.



Märkus 7.18. Teoreemi tõestuse käigus näitasime, et $\text{Ker } f = \text{Ker } e$. Duaalselt saab näidata, et

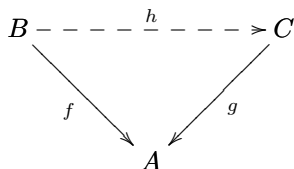
$$\text{Coker } f = \text{Coker } m. \quad (34)$$

Kategooria $\mathcal{A}$ objekti A minevate morfismide hulgal $(\mathcal{A} \downarrow A)_0$ saab defineerida eeljärjestuse (refleksiivse ja transitiivse seose) $\leq$, lugedes

$$f \leq g \iff (\exists h)(f = gh),$$

ja ekvivalentiseose $\equiv$:

$$f \equiv g \iff f \leq g \wedge g \leq f.$$

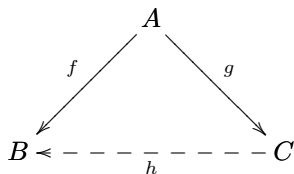


Duaalselt saab objektist A lähtuvate morfismide hulgal $(A \downarrow \mathcal{A})_0$ defineerida eeljärjestuse $\leq$,

$$f \leq g \iff (\exists h)(f = hg),$$

ja ekvivalentiseose $\equiv$:

$$f \equiv g \iff f \leq g \wedge g \leq f.$$



Definitsioon 7.19. Objekti $A \in \mathcal{A}_0$ **alamobjektiks** nimetatakse monomorfismi $f : B \rightarrow A$ ekvivalentsiklassi $[f]$ hulgal $(\mathcal{A} \downarrow A)_0$ defineeritud seose $\equiv$ järgi.

Definitsioon 7.20. Objekti $A \in \mathcal{A}_0$ **faktorobjektiks** nimetatakse epimorfismi $f : A \rightarrow B$ ekvivalent-siklassi $[f]$ hulgal $(A \downarrow \mathcal{A})_0$ defineeritud seose $\equiv$ järgi.

Definitsioon 7.21. Kui Abeli kategooria $\mathcal{A}$ morfism $f : A \rightarrow B$ tegurdub kujul $f = me$, siis objekti B alamobjekti $[m]$ nimetatakse f **kujutiseks** (täht. $m = \text{Im } f$) ja objekti A faktorobjekti $[e]$ nimetatakse f **kokujutiseks** (täht. $e = \text{Coim } f$).

Definitsiooni põhjal on kohe selge, et kehtib järgmine lause.

Lause 7.22. Abeli kategoorias kui m on monomorfism, siis $m = \text{Im } m$ ja kui e on epimorfism, siis $e = \text{Coim } e$.

Definitsioon 7.23. Morfismide paari

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

nimetatakse **täpseks** kohal B , kui $\text{Im } f \equiv \text{Ker } g$ (ekvivalentseid kui B alamobjektid). Jada

$$\dots \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow \dots \quad (35)$$

nimetatakse **täpseks**, kui ta on täpne igal kohal.

Täpsete jadade abil saab muuhulgas kirjeldada teatud tüüpi morfisme.

Lause 7.24. Abeli kategoorias on jada

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \quad (36)$$

täpne parajasti siis, kui f on monomorfism.

Tõestus. Paneme tähele, et $0 : 0 \rightarrow A$ on monomorfism, sest kui $0g = oh$, kus $g, h : C \rightarrow 0$, siis $g = h$ tänu sellele, et 0 on lõppobjekt. Seega tänu lausele 7.22 piisab meil näidata, et $0 \equiv \text{Ker } f$ parajasti siis, kui f on monomorfism.

Tarvilikkus. Olgu $0 \equiv \text{Ker } f$. Oletame, et $fg = fh$, kus $g, h : C \rightarrow A$. Siis $f(g - h) = 0$. Tuuma definitsiooni tõttu leidub üheselt määratud morfism $k : C \rightarrow 0$ nii, et $g - h = 0k = 0$. Järelikult $g = h$ ja f on monomorfism.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0} & A & \xrightarrow{f} & B \\ & \nwarrow k & \nearrow g-h & & \\ & C & & & \end{array}$$

Piisavus. Olgu f monomorfism. On selge, et $f0 = 0$. Oletame, et $g : C \rightarrow A$ on selline, et $fg = 0 = f0$. Siis $g = 0$. Üheselt määratud morfism $C \rightarrow 0$, mis muudab kolmnurga diagrammis

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0} & A & \xrightarrow{f} & B \\ & \nwarrow 0 & \nearrow g & & \\ & C & & & \end{array}$$

kommutatiivseks, on nullmorfism. Sellega oleme näidanud, et $0 : 0 \rightarrow A$ on morfismi f tuum. ■

Duaalselt saab tõestada järgmise tulemuse.

Lause 7.25. Abeli kategoorias on jada

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{0} 0$$

täpne parajasti siis, kui f on epimorfism.

Lause 7.26. Abeli kategoorias on jada

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{0} 0$$

täpne parajasti siis, kui f on isomorfism.

Tõestus. See järeldub lausest 7.16, lausest 7.24 ja lausest 7.25. ■

Tuleb välja, et teatud funktorid säilitavad täpseid jadasid.

Lause 7.27. Kui funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ Abeli kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ vahel säilitab tuumad ja kotuumad, siis ta säilitab täpsed jadad.

Tõestus. Ilmselt seosest $a \equiv a'$ järelneb seos $F(a) \equiv F(a')$. Vaatleme täpset jada (35). Olgu $f = me$, kus m on monomorfism ja e on epimorfism. Siis (34) ja lause 7.14 tõttu

$$\text{Ker}(\text{Coker } f) = \text{Ker}(\text{Coker } m) = m = \text{Im } f.$$

Analoogiline mõttekäik annab meile, et

$$\text{Im } F(f) = \text{Ker}(\text{Coker } F(f)).$$

Järelikult

$$\begin{aligned} \text{Im } F(f) &= \text{Ker}(\text{Coker } F(f)) = \text{Ker}(F(\text{Coker}(f))) = F(\text{Ker}(\text{Coker}(f))) = F(\text{Im } f) \equiv F(\text{Ker } g) \\ &= \text{Ker}(F(g)), \end{aligned}$$

mis tähendab, et jada

$$\cdots \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \rightarrow \cdots$$

on täpne. ■

Viited

- [1] M. Kilp, *Kategooriad* (Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2000).
- [2] M. Kilp, *Algebra II* (Tartu, 1998).
- [3] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician* (Springer, New York, 1998).
- [4] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [5] H. Herrlich, G. Strecker, *Category Theory* (Allyn and Bacon, Boston, 1973).
- [6] J. Adámek, H. Herrlich, G. Strecker, *Abstract and Concrete Categories* (2004),
<http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf> .
- [7] M. Barr, Ch. Wells, *Category Theory Lecture Notes* (1999),
<http://www.math.upatras.gr/~cdrossos/Docs/B-W-LectureNotes.pdf> .
- [8] H.P. Gumm, *Elements of the general theory of coalgebras* (1999?),
www.mathematik.uni-marburg.de/~gumm/Papers/Luatcs.ps .

Sisukord

1. Kategooriad	2
1.1. Hulgateoreetilistest alustest	2
1.2. Kategooria definitsioon	2
1.3. Funktsionaalsed programmeerimiskeeled kui kategooriad	4
1.4. Mõned konstruktsioonid	5
2. Morfismide ja objektide liigid	6
2.1. Morfismide liigid	6
2.2. Objektide liigid	10
3. Funktorid	12
3.1. Kovariantsed ja kontravariantsed funktorid	12
3.2. Duaalsusest	14
3.3. Funktorite omadusi	15
3.4. Komakategooriad	16
4. Loomulikud teisendused	20
4.1. Loomulike teisenduste definitsioon ja näited	20
4.2. Funktorite kvaasikategooriad	22
4.3. Yoneda Lemma	22
4.4. Loomulike teisenduste horisontaalne kompositsioon	25
5. Piirid ja kopiirid	27
5.1. Korrutised ja kokorrutised	27
5.2. Võrdsustajad ja kovõrdsustajad	33
5.3. Tagasitõmbajad ja väljatõukajad	35
5.4. Piirid ja kopiirid	38
5.5. Täielikud kategooriad	41
5.6. Piire säilitavad funktorid	44
5.7. Piiride kommuteerumine	49
5.8. Filtreeritud kopiirid	53
5.9. Piirid funktorite kategoorias	58
5.10. Ülesanded	62
6. Kaasfunktorid	64
6.1. Motiveerivad näited	64
6.2. Kaasfunktorid	65
6.3. Kaasfunktorite näited	71
6.4. Kaasfunktoriteoreem	72
6.5. Kategooriate ekvivalentsus	75
6.6. Reflektiivsed alamkategooriad	78
6.7. Ülesanded	80
7. Abeli kategooriad	81
7.1. Ab-kategooriad	81
7.2. Abeli kategooriad	84